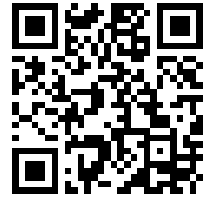
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

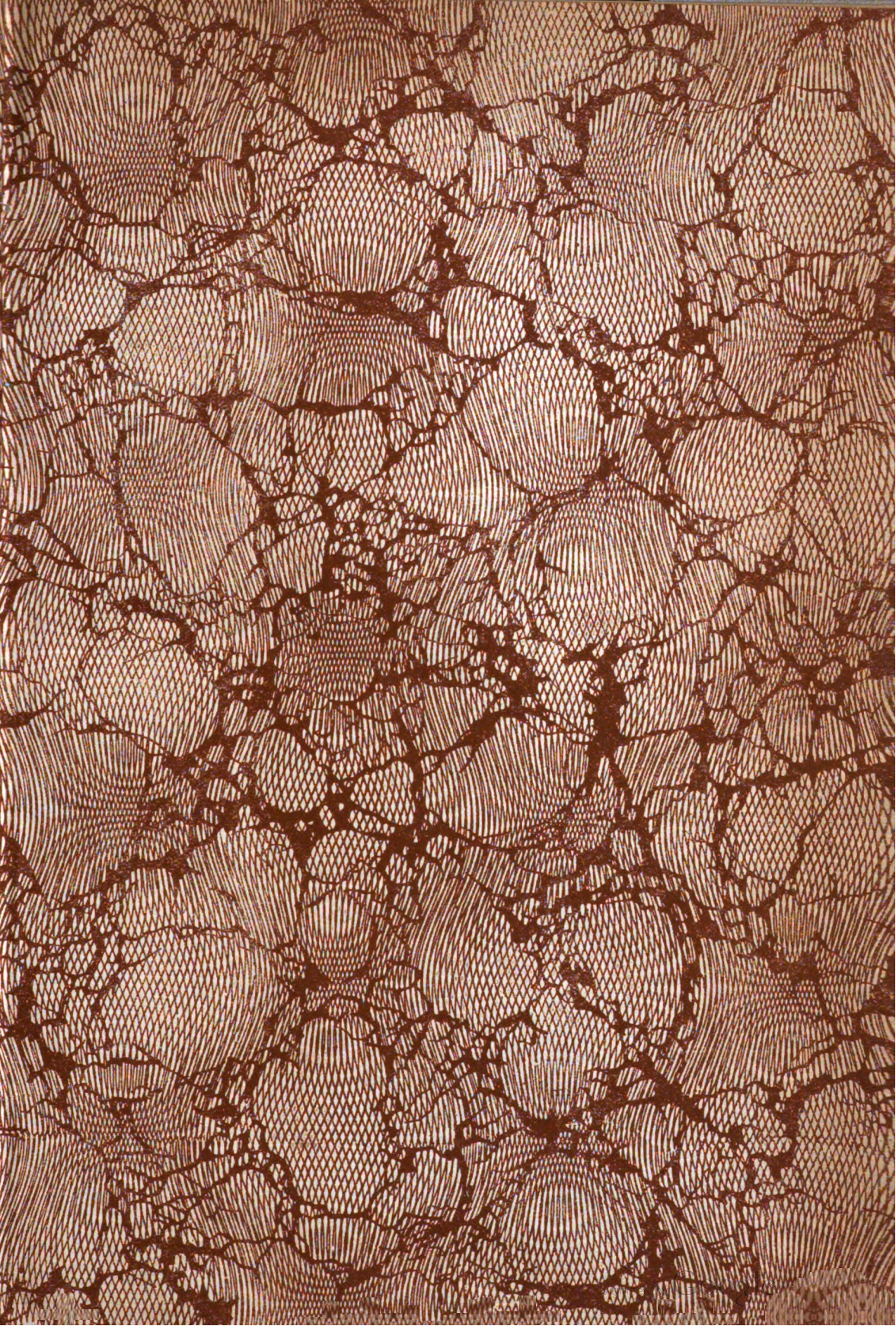
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`



Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

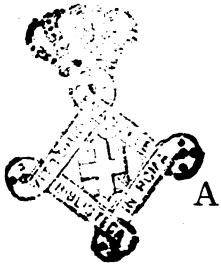
DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA



ANNO XIII — FASC. I.

TORINO

ROSENBERG & SELLIER

Via Maria Vittoria, 18

1911

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche.

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8.°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino, Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 14.

Sommario del presente Fascicolo.

T. L. HEATH, Osservazioni storiche sopra la scoperta degli irrazionali, p. 1-4.

Storia (R. Guimaraes, A. Favaro) p. 5-6.

Geometria elementare (Veronese-Cazzaniga) p. 7-9.

Geometria descrittiva (E. Müller, E. Vallois, G. Fano) p. 9-14.

Geometria analitica (G. Castelnuovo) p. 14-20.

Opere complete ed Enciclopedie (Weber-Wellstein, E. Schering, H. de la Goupillière) p. 21-25.

Didattica (Mannoury) p. 25-27.

Determinanti (G. Kowalewski) p. 27-28.

Teoria delle superficie (F. Enriques e F. Severi) p. 28-36.

Teoria dei gruppi (E. Nette) p. 36-27.

Programmi e riassunti di corsi universitari (A. Padoa) p. 37-44.

Notizie. Enciclopedia delle matematiche elementari. Opere di L. Eulero. L'ed. nazionale delle Opere di G. Galileo. I determinanti furono scopertî in Giappone. La corrispondenza fra G. Grandi e T. Ceva. Monumento a E. Beltrami.

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

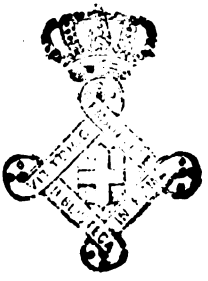
DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUDBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA



ANNO XIII

1911

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18

1911

Digitized by Google

Proprietà Letteraria

Digitized by Google

INDICE

T. L. Heath. Osservazioni storiche sopra la scoperta degli irrazionali, p. 1-4.
L. Neumann. Jacob Lüroth, 50-57.
F. Cajori. P. Ruffini ed il così detto « Metodo di Horner », p. 81-86.

RECENSIONI ED ANNUNZI.

R. Guimaraes. Les Matématiques en Portugal. (G. L.), p. 5-6. — **A. Favaro.** G. Galilei (G. L.), p. 6. — **G. Veronese** e **P. Gazzaniga.** Elementi di geometria (F. Palatini), p. 7-9. — **E. Müller.** Darstellende Geometrie. — **I. E. Vaillois.** Géométrie descriptive. — **G. Fano.** Geometria descrittiva (G. L.), p. 9-14. — **G. Castelnuovo.** Geometria analitica, II ed (E. Ciani), p. 14-20. — **Weber-Wellstein.** Encyclopedie der Elementarmathematik, III (U. Amaldi), p. 21-23. — **E. Schering.** Mathematische Werke (G. L.), p. 23-24. — **H. De La Goupillière.** Mémoires divers (G. L.). — **Mannoury.** Method. und Phil. zur Elementar-Mathematik (S. Medici), p. 35-26. — **G. Kowalewski.** Determinantentheorie (G. Vivanti), p. 27-28. — **F. Severi** e **F. Enriques.** Surfaces hyperelliptiques (A. Comessatti), p. 28-36. — **E. Netto.** Gruppen-und Substitutienentheorie (G. L.), p. 36-37. — **M. Simon.** Geschichte der Mathematik (G. L.), p. 57-60. — **Decourdemanche.** Poids et mésure (G. L.), p. 60-61. — **F. Brioschi.** Opere (G. L.), p. 61-62. — **L. Fuchs.** Werke, III (G. L.), p. 62. — **H. Poincaré.** Science et méthode (G. L.), p. 62-63. — **F. Caldarera.** Moto dei pianeti (T. Levi-Civita), p. 63-64. — **G. Pizzamiglio.** Costruzioni metalliche (S. Spera), p. 64-65. — **C. Haret.** Mécanique sociale (A. Loria), p. 66-67. — **G. Kowalewski** Differential-und Integralrechnung (G. Vivanti), p. 68-69. — **Von Dantscher.** Irrationalzahlen (G. Vivanti), p. 69. — **J. Thomae.** Bestimte Integrale und Fourierschen Reihen (G. Vivanti), p. 69-70. — **J. A. Serret.** Differential-und Integralrechnung (G. L.), p. 70-72. — **L. Schlesinger.** Differentialgleichungen (G. Vivanti), p. 72-73. — **N. Nielsen.** Unendliche Reihen p. 73-74. — **P. Montel.** Séries de polynômes (G. Vivanti), p. 74-75. — **J. A. Fuët.** Théorie des fonctions (G. Vivanti), p. 76. — **K. Boehn.** Elliptische Funcktionen (G. L.), p. 76-77. — **J. J. Sylvester.** Papers III (G. L.), p. 87. — **G. Vailati.** Scritti (G. L.), p. 87-88. — **H. Hancock.** Elliptic functions, I (G. L.), p. 89-92. — **A. Rosenthal.** Gleichflächige Polyeder (G. L.), p. 93. — **F. Czuber.** Wahrscheinlichkeitsrechnung, II (P. Pizzetti), p. 93-94. — **F. Hack.** Wahrscheinlichkeitsrechnung (G. L.), p. 94. — **R. Sturm.** Geometrische Werwanschaften II, III, IV (E. G. Togliatti), p. 95-102. — **Weblen and Young.** Projective Geometry, I (B. Levi), p. 102-104. — **L. N. G. Filon.** Projective Geometry (G. L.), p. 104. — **Soundara Row.** Paper Folding. — **Young.** Der kleine Geometer (G. L.),

Digitized by Google

p. 105-106. — **C. Burali-Forti e R. Marcolongo.** Omografie vettoriali (M. Bottasso), p. 106-109. — **I. N. Thiele.** Interpolationsrechnung (U. Barbieri), p. 110-112. — **J. Hadamard.** Calcul des variations, I (E. E. Levi), p. 112-114. — **O. Bolza.** Variationsrechuung (G. Vivanti), p. 115-118. — **C. A. Laisant.** L'enseignement du calcul (G. L.), p. 115-119. — **Killing und Hovenstadt.** Mathem. Unterricht, I (G. L.), p. 119-120. — Berichte (G. L.), p. 121. **A. Hoefler.** Didaktik des math. Unterrichts (S. Medici), p. 121.123. — **G. Loria.** Ebene Kurven (G. Vivanti), p. 123-124. — **E. Beutel.** Alg. Kurven (G. L.), p. 124-125. — **F. Dingeldey.** Sammlung von Aufgaben, I (G. L.), p. 125-127. — **E. Fabry.** Problèmes (G. L.), p. 127-128. — Taschenbuch (G. L.), p. 128-130. — **E. Lebon.** P. Appell (G. L.), p. 130. — Rassegna delle recenti dissertazioni (G. L.), p. 130-133.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI.

A. Padoa. Univ. di Ginevra. Conferenze tenute nel Gennaio 1911.

NOTIZIE.

Euciclopedia delle matem. elementari. Opere di Eulero. L'ed. nazionale di G. Galilei. I determinanti. La corrispondenza fra G. Grandi e T. Ceva. Monumento a Beltrami, p. 44-48.

Tema proposto dalla Soc. delle scienze di Haarlem. Il I centenario di una grande casa editrice. Un consiglio. Il V congresso intern. dei matematici. Tema d'astronomia. Concorso a premio. Tema proposto dall'Accademia di Madrid. Concorso bandito dall'Accademia del Belgio, p. 78-80.

J. Massau. Un'altra società matematica. Congresso americano. Conferenze. Eppur si muove! Inedita tanneryana. Una biografia di G. de St. Vincent. Pubblicazioni recenti sopra la storia delle matematiche, p. 133-136.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XIII — Gennaio, Febbraio e Marzo — 1911

Osservazioni storiche sopra la scoperta degli irrazionali

di T. L. HEATH.

Gli scrittori sopra la storia della matematica greca, le cui opere possono dirsi classiche — Ermanno Hankel, Maurizio Cantor e Federico Hultsch — basano le loro ricerche in primo luogo sopra uno studio profondo delle opere originali dei matematici greci che sopravissero sino al giorno d'oggi; per quanto concerne le opere perdute, riguardo a cui si devono raccogliere le asserzioni di altri greci attribuenti certe particolari scoperte a certe determinate persone, essi riferiscono tali quali i passi relativi, senza (di regola) dare gran peso alle tradizioni vaghe e senza trattenersi a lungo in speculazioni relative a punti oscuri. Attualmente è sorta in Germania una nuova generazione di cultori della storia della matematica greca che si occupano, in memorie d'intollerabile lunghezza, di piccole questioni, sulle quali le testimonianze sono immeritevoli di fede o inconclusive. Riguardo alla forma, le loro memorie constano generalmente di indagini penosamente minute, anzi persino microscopiche, intorno ai passi in cui scrittori, quali Proclo, fanno cenno di tradizioni relative alle origini di teorie o teoremi speciali; e quanto alla loro critica investigatrice, quando mostra che un'asserzione particolare non può essere esatta e degna di fede, essa riesce non soltanto innocua ma utile. Senonchè molto del lavoro di tali scrittori è guastato da un desiderio eccessivo di mostrarsi originali; essi sono tentati di saltare troppo presto alle conclusioni e di enunciarle in modo troppo positivo; perciò sembra esser giunto il momento di porre in guardia contro la classe di lavori in questione, specialmente a vantaggio di coloro la cui conoscenza del greco non è sufficiente ad impedire loro di essere traviati. Sarebbe difficile trovare un' occasione migliore per siffatto ammonimento di quella offerta da una memoria di H. Vogt (1).

(1) Heinrich Vogt — *Die Entdeckungsgeschichte der Irrationalen nach Plato und andere Quellen des 4. Jahrhunderts.* Bibliotheca mathematica, III Folge, X Bd., 1910, p. 97-155.

Digitized by Google

Essa consta di 59 lunghe ed aride pagine destinate a dimostrare alcune tesi che possono enunciarsi brevemente così:

I. I Pitagorici posteriori (non Pitagora ed i suoi immediati discepoli) scoprirono e dimostrarono (prima del 410 a. C.) l'incommensurabilità della diagonale di un quadrato, come fatto isolato.

II. Teodoro da Cirene (circa 410-390) dimostrò in generale l'irrazionalità delle radici quadrate (« irrazionali »), servendosi d'un metodo che è la generalizzazione della dimostrazione Pitagorica dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

III. Teeteto (circa 390-370) gettò le basi di una teoria degli irrazionali quadratici e distinse le classi principali in cui essi sogliono dividersi.

IV. Euclide (a partire circa dal 330) perfezionò tale teoria, suddividendo ulteriormente tali classi ed introducendo inoltre gli irrazionali biquadratici.

A parer mio queste quattro tesi non sarebbero straordinariamente importanti, nemmeno se fossero dimostrate inconfutabilmente; ma esse non sono certamente stabilite dalle argomentazioni esposte nella memoria del Vogt. Infatti, molti de' suoi ragionamenti mi sembrano essere semplici ipotesi, e la impressione generale prodotta nella mia mente è che non fu l'evidenza a suggerire le tesi da lui sostenute, ma che egli prese le mosse da teorie preconcette e si propose di costruire le prove conformi alla teoria; a tale scopo spesso egli fu costretto di trarre a forza dal greco un senso non naturale o persino impossibile.

Io non intendo di combattere la prima delle sue tesi, quantunque io non veda che egli abbia definitivamente dimostrato che Proclo abbia attribuite a Pitagora « la dottrina delle proporzioni » (των αναλογον: Diels) e non « gli irrazionali » (των αλογων); prescindendo da ciò, l'unico argomento reale mi sembra essere la improbabilità del fatto che, una volta scoperta l'irrazionalità di $\sqrt{2}$, sarebbe scorso un intervallo di cinquanta o cento anni prima che lo stesso fatto venisse dimostrato riguardo a $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ecc.; ma ciò non può forse spiegarsi con la deviazione subita dai pensieri degli uomini di scienza per effetto di altri problemi quali la quadratura del circolo e la duplicazione del cubo (quest'ultimo equivalente alla ricerca di $\sqrt[3]{2}$)? Gli è contro la seconda delle tesi del Vogt che io trovo le più forti obbiezioni. Secondo Platone *(Teeteto* 147 D) Teodoro dimostrò, separatamente, l'incommensurabilità delle radici quadrate di 3, 5, 6 . . . 17 piedi quadrati, ma a 17 « egli si arrestò per

Digitized by Google

qualche ragione (πως). Vogt sostiene che Teodoro si fermò perchè le sue prove successive vennero a essere una vera dimostrazione, mediante induzione completa, dell' incommensurabilità di *tutte* le « radici quadrate » (come egli le chiama). Ma non è forse incredibile che Teodoro avesse dimostrato il teorema generale e che si sia arrestato a 17 per quella ragione, ma che Platone *non l' abbia saputo?* Ciò indubbiamente porterebbe ad attribuire a Platone troppo poca intelligenza! Vogt sembra avere percepita tale obbiezione a questa teoria, perchè tenta a sostenere che πως significa, non già « per qualche ragione ». ma « zufällig », « per caso », « accidentalmente »; suppone cioè che Platone si sia servito dell'espressione « per caso » nell' intento di convincere che non vi era alcuna ragione per cui Teodoro dovesse arrestarsi a $\sqrt{17}$, piuttosto che a qualche altro irrazionale, dal momento che aveva già dimostrato il teorema generale. Ma non vi è nessuna prova dell' uso di πως in quel senso preciso; infatti è impossibile che l' enclitica πως sia l' unica parola energica in tutta la frase od avere un significato diverso dal solito che è « in qualche modo », « per qualche ragione », « checchè possa esser stato ».

Ecco altri esempi dei metodi speciali del Vogt. Egli sostiene che Teodoro dimostra l' incommensurabilità di $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, . . , $\sqrt{17}$ dopo di avere successivamente costruiti dei triangoli rettangoli in modi particolari e giunge a tale conclusione traducendo εγραφε con « er hatte Zeichnungen gemacht » (« aveva tracciate delle figure ») e sostiene la distinzione fra quella parola e αποφαινων (« dimostrando ») che segue immediatamente. Ma sgraziatamente per tale interpretazione egli non ha tenuto conto della parola piccola ma importante τι che accompagna εγραφε nel testo greco. L' espressione τι εγραφε può significare soltanto « scrisse » o « provò *qualchecosa* », cioè « scrisse una certa (memoria) »; è impossibile che significhi « tracciò alcune figure » (al plurale); così stando le cose scompare l' ipotetico stridente contrasto fra εγραφε e αποφαινων: in realtà il significato è semplicemente questo, « egli scrisse una certa memoria in cui mostrò ecc. » Vogt sostiene poi la propria opinione sopra le costruzioni di Teodoro mediante un' interpretazione arbitraria e senza base della parola συναμφοτερα dell' *Hippias Major* (303 BC); secondo lui tali parole implicano non (come si suole) la semplice addizione di due quantità, ma l' addizione dei quadrati di due numeri, seguita dall' estrazione della radice quadrata dalla loro somma.

Non è necessario che io moltiplichi ulteriormente le prove delle violenze commesse dal Vogt contro il greco. A pagine 147-8

Digitized by Google

si trova emessa un'opinione assai strana, basata su una straordinaria confusione di idee. Se l'irrazionale non venne scoperto che poco prima il 410 a. C. e se il vocabolo αλογος nel significato di « irrazionale » non compare prima di Aristotele, resta da spiegare come Democrito abbia potuto scrivere περι αλογων γραμμων, cioè « Sopra le rette irrazionali ». La spiegazione data dal Vogt è che le rette, quando ad esse venga applicata la teoria atomica, contengono infiniti elementi lineari e che quindi due linee qualunque sono senza rapporto (non hanno rapporto) fra di loro (« wir sagen: das Symbol $\frac{\infty}{\infty}$ ist unbestimmt »!) è dunque in questo senso che è usato quì il vocabolo αλογων, onde esso non ha niente a che fare con gli irrazionali. Ma certamente Democrito non può avere considerate tutte le rette « senza rapporto » fra loro (ad es. una retta ed un'altra di lunghezza doppia o della stessa lunghezza) e se lo avesse fatto quale sarebbe stato lo scopo di uno scritto sopra le αλογοι γραμμαι, se non esistono linee che *non* siano αλογοι?

Aggiungerò ancora poche osservazioni intorno alla quarta tesi. L'argomentazione esposta dal Vogt per dimostrare che gli *Elementi* di Euclide furono scritti prima del 320 a. C. poggia sopra due assunzioni arbitrarie combinate ad una interpretazione forzata di una frase contenuta nel manoscritto del trattato di un discepolo di Aristotele « Sopra le linee indivisibili ». La frase greca è (967 a 18, 19): των αλλων ουδεμια, ων δη νυν ειρηται.

La prima assunzione è che queste parole siano state tolte parola per parola da Xenocrate (396-314). Poi, il significato naturale ed usuale di quella frase sarebbe « nessuna delle altre (linee) testè menzionate »; Vogt vuole invece che essa significhi linee designate con « die andere Bezeichnungen *welche jetzt aufgekommen sind* », cioè linee note sotto « gli altri nomi che *appunto ora sono entrati nell' uso* ». La seconda assunzione arbitraria è che Xenocrate si riferisca quì precisamente al X libro degli *Elementi* di Euclide e non alla dottrina allora diffusa od agli *Elementi* di Teeteto, quantunque Vogt ammetta che Teeteto distingua i tipi principali degli irrazionali citati. Un ulteriore commento riuscirebbe superfluo.

Londra, Ottobre 1910.

Digitized by Google

Storia.

R. Guimaraes — *Les mathématiques en Portugal.* — Deuxième édition. 8.° p. 655. Coïmbre, Imprimerie de l'Université, 1909. (Prezzo 24 fr.)

I nostri lettori ricorderanno *(Bollettino* T. III, 1900, p. III) come la prima edizione della presente opera sia stata fatta in occasione dell'Esposizione mondiale che si tenne a Parigi nel 1900. Essa ora si ripresenta per la seconda volta triplicata di mole, ma conservando i lineamenti generali che i matematici avevano mostrato di altamente apprezzare. Dopo una densa ed estesa esposizione delle vicende politiche delPortogallo, in relazione con quelle dell' insegnamento e della scienza di quel nobile paese *(*p. 1-102), l'A. dà un elenco di tutte le opere pubblicate da matemalici portoghesi all' interno od all' estero, ordinate con il metodo adottato nel ben noto *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.* Ma egli, intorno a molti scritti ha dato, oltre le indicazioni bibliografiche, alcuni cenni capaci di indicarne il valore ; trattandosi in gran parte di lavori recenti, anzi di persone tuttora viventi, l' egregio capitano d' artiglieria ha dato prova ci possedere non comune coraggio civile: ed infatti la persona che da lui era stata giudicata con maggiore severità non mancò di pubblicare una vivace auto-difesa (1), la cui esistenza deve almeno venir segnalata ai nostri lettori ; non più dell' esistenza, per non entrare in un dibattito personale, a cui il *Bollettino* per l' indole sua intende rimanere estraneo; ma poichè indirettamente quell' opuscolo tocca chi scrive il presente resoconto (2), per alcuni appunti da lui fatti (3), è dover nostro osservare come la nuova pubblicazione del Sig. Cabreira confermi come egli possegga troppo scarsa famigliarità con gli elementi della geometria analitica (v. p. 31) e con le regole di diffe-

(1) *Les mathématiques en Portugal. Deuxième defense des travaux* de A. Cabreira (Lisbonne, 1910).

(2) Cfr. *Spezielle alg. und transs. ebene Kurven* (Leipzig, 1902) p. 588.

(3) Per porgere ai lettori un'idea pel modo con cui il sig. Cabreira si difende, riferiamo le seguenti frasi, che si leggono a pag. 96 del suo opuscolo : « Le critique dit encore que ces inéxactitudine sont relevées par Mr. Loria dans un livre qui est traduit en allemand. Il est trés-extraordinaire qu' un professeur distinguè gaspille du papier et du temps a signaler dans une oeuvre d' enseignement des erreurs qu' il trouverait dans mon mèmoire! Le fait serait seulement rationnel si Mr. Loria eût à prèsenter son opinion dans un journal auquel j' offrirais mon travail ».

Digitized by Google

renziazione (v. p. 35-36) per essere in grado di affrontare l'investigazione di nuove proprietà delle curve.

Prescindendo da ogni apprezzamento intorno ai giudizi pronunciati dal Sig. Guimaraes intorno al valore degli scritti dei suoi conterranei, ci sentiamo di dichiarare che egli ha compiuto un' opera utile alla scienza e veramente patriottica, la quale meriterebbe di venire imitata anche presso altri paesi civili.

G. L.

A. Favaro — *Galileo Galilei.* 8.° picc. p. 74. Modena, Formiggini 1910. (Prezzo L. 1).

Questo grazioso volumetto è il decimo di una raccolta intitolata *Profili* destinato ad accogliere « non aridi riassunti eruditi, ma vivaci, sintetiche e suggestive rievocazioni di figure attraenti e significative scelte senza limiti di tempo e di spazio », opera di autori di singolare competenza; raccolta di cui il *Bollettino* non ebbe occasione sinora di occuparsi, giacchè i protagonisti dei volumi sinora pubblicati non appartengono alla classe dei cultori delle scienze esatte, ma su cui spera di avere occasione di tornare in avvenire, chè è presumibile non verranno da essa esclusi personaggi così altamente rappresentativi quali Leonardo da Vinci, Descartes, Leibniz e Newton, Helmholtz e W. Thomson.

Sarebbe superfluo l' arrestarsi a dimostrare come nessuno era più indicato di Antonio Favaro a tracciare il profilo di Galileo Galilei, nessuno avendo oggi conoscenza più vasta e profonda di lui intorno ai più minuti particolari della sua vita. A lui dunque fu facile adempiere egregiamente il compito affidatogli dal solerte editore, e porgere un'idea esatta del carattere di quel sommo e delle cause recondite del gran dramma, che ebbe per triste epilogo la condanna dell' opinione copernicana intorno alla struttura del Cosmo e di chi se ne era fatto assertore.

Il volume del Favaro (ove non mancano dati biografici nuovi e notizie poco conosciute sopra certi retroscena) diffondendosi nel gran pubblico varrà ad accrescere la pietosa simpatia di cui gode il Grande fiorentino, onde rappresenta una nuova pietra del grandioso monumento che da un trentennio va a lui elevando il dotto professore dall'Ateneo padovano.

G. L.

Digitized by Google

Geometria elementare.

Elementi di geometria ad uso dei Ginnasi e Licei e Istituti tecnici (1° biennio) del Prof. Giuseppe Veronese trattati con la collaborazione del Prof. Paolo Gazzaniga. IV edizione. 8° (Prezzo L. 4).

Nella presente edizione degli « Elementi di geometria » del Prof. Veronese troviamo che l'A., senza alterare il piano fondamentale della sua opera, ha introdotto nuove notevoli modificazioni dal punto di vista didattico, sia procurando di rendere l'esposizione più adatta all'intelligenza dei lettori cui il libro è dedicato, sia mediante convenienti inversioni nell'ordine della materia, sia con opportuni ampliamenti e con l'aggiunta di figure.

Una delle più importanti modificazioni consiste nell'aver riunite le nozioni generali sull'eguaglianza delle figure in un solo paragrafo, e nell'aver esposto questa importante parte della materia con chiarezza e semplicità notevolmente maggiori che nelle precedenti edizioni. Ho già avuto occasione altre volte (cfr. questo *Bollettino,* anni 1902 e 1903) di esporre le ragioni per le quali, riguardo alla teoria dell'eguaglianza, io ritengo il metodo del Veronese didatticamente preferibile a quello seguito in altri testi pur pregevoli comparsi in questi ultimi anni.

Recentemente è uscito un altro eccellente trattato *(Geometria elementare* ad uso dei Licei ecc. del Prof. Michele De Franchis), nel quale vengono svolti i principi dell'eguaglianza delle figure mediante il movimento, ma non inteso come in altri testi nel senso di un'operazione meccanica, bensì di un'operazione, ente logico, (della quale si postula l'esistenza) soddisfacente a determinate leggi e che trasforma ogni punto di una figura in un punto, producendo così una figura i cui punti trovansi in corrispondenza biunivoca con quelli della primitiva. Però osservo che, nel mentre col metodo seguito dal De Franchis non si viene ad evitare il concetto di corrispondenza (a motivo del quale da taluni è reputato difficile il metodo del Veronese), non sarà certo facile far comprendere ai principianti la differenza fra il movimento com'è inteso nel mondo materiale e quello inteso com'è nel testo di una trasformazione prodotta da una operazione che non sappiamo eseguire, che agisce all'infuori di noi, della quale insomma non conosciamo che gli effetti. Inoltre col metodo accennato vengono escluse dall'eguaglianza le figure solide simmetriche, il che è in contraddizione col concetto di uguaglianza quale si ha nella vita pratica, nella quale p. es.

Digitized by Google

non avviene mai che si dica che non sieno eguali due edifici di una piazza, quando siano figure fra loro simmetriche. Invece l' istituzione di una corrispondenza è una operazione che i giovani sono abituati ad eseguire nella vita comune sia nel campo materiale che in quello astratto, e per la quale essi trovano nel testo del Veronese fin da principio anche un esempio della possibilità di effettuarla nel campo geometriche, allorchè, data una figura, imparano a costruirne l' opposta rispetto a un punto.

Con l' accennata inversione tutta la parte prima del libro assume un assetto che nulla può lasciar a desiderare, giacchè, invertendo anche, se si voglia, il § 4 del libro II con le prime pagine del § 5 (le quali sono da quello indipendenti) gli argomenti in essa contenuti vengono a succedersi nel seguente ordine: Rettimetria — Proprietà fondamentali di posizione del piano — Teoremi fondamentali sulle rette parallele — Proprietà fondamentali dei triangoli e dei poligoni — Circonferenza e cerchio — Problemi elementari.

Nella seconda parte del libro è notevole la maggior cura con cui l'A. fa rilevare il principio mediante il quale molti teoremi relativi ai triedri si possono dedurre da altri relativi ai triangoli. L' applicazione di tal principio oltre ad essere sommamente educativa, produce anche economia di tempo e risparmio di lavoro da parte dei giovani, giacchè una volta che detto principio siasi ben chiarito con gli esempi che trovansi nel testo, molti teoremi della geometria della stella (le dimostrazioni dei quali coi metodi seguiti in altri libri di testo non sono tra le più semplici) non hanno bisogno che di essere enunciati assieme dei loro analoghi di geometria piana.

Alla deduzione di proposizioni da altre mediante il solo scambio di certe parole i giovani sono stati già abituati precedentemente in casi più semplici trattando dell' angolo, del cerchio, del diedro, e di essa faranno uso ancora p. es. nel paragrafo che tratta delle figure simili (il 4° del libro V), la definizione delle quali non differisce da quella delle figure eguali che per il fatto che alle coppie di segmenti eguali vengono sostituite coppie di segmenti di rapporto costante. E già che sono stato condotto a parlare del libro V, mi piace far notare che il § 1 (Sistemi lineari omogenei di grandezze geometriche) è stato in buona parte rifatto, mettendo bene in chiaro gl' importanti concetti di grandezza intensiva e di grandezza estensiva di una figura e quello di sistema lineare omogeneo di grandezze.

Quanto alla teoria dell' equivalenza, chiarito il concetto di grandezza limite (p. es. la *figura* circonferenza è il limite delle serie dei *contorni* dei poligoni regolari inscritti e di quelli circo-

Digitized by Google

scritti, in quanto che i punti di quella si trovano sempre nella parte di piano compresa fra due qualsiansi dei contorni in discorso, e inoltre detti contorni variano in modo che i loro punti si avvicinano indefinitamente a quelli della circonferenza), l' A. chiama equivalenti due figure allorchè o sono somme di parti ciascuna a ciascuna rispettivamente eguali, o sono limiti di figure fra loro eguali od equivalenti. Per tal modo, mentre in altri testi si ricorre ad altrettante definizioni per fissare che cosa debbasi intendere per superficie (sviluppata) di un cilindro, di un cono ecc. l'A., senza ricorrere ad altre definizioni, può porre i teoremi che affermano che la superficie laterale del cilindro, del cono ecc., è equivalente ad un certo rettangolo, ad un certo triangolo ecc. In altri termini la definizione accennata presenta il vantaggio (al pari di quelle relative all'eguaglianza ed alla similitudine) di fornire un concetto generale dell' equivalenza, e di potersi perciò estendere ad altre figure oltre a quelle che vengono considerate nel testo.

Dal rapido esame che abbiamo fatto si può concludere (senza intendere con ciò di diminuire il merito di illustri precursori, fra i quali primeggia il De Paolis) che il Prof. Veronese ha diritto, oltre al vanto di essere stato il primo in Italia a pubblicare un libro per le scuole medie fondato sui risultati delle più recenti critiche relative ai fondamenti della geometria, anche a quello di aver dato alle singole teorie un assetto d' una perfezione che, a parer mio, finora nessun altro autore ha raggiunto.

FRANCESCO PALATINI.

Geometria descrittiva.

E. MÜLLER. — *Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technischen Hochschulen Mit 273 Figuren im Text und 3 Tafeln.* I Band. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1908, 8° gr. p. 366. (Prezzo del vol. leg. Mk. 12).

E. VALLOIS, *Cours de géométrie descriptive à l' usage des candidats à l'École des Beaux-Arts.* Paris, Gauthier-Villars, 1909 p. 299 (Prezzo fr. 7.50).

G. FANO, *Lezioni di geometria descrittiva date nel R. Politecnico di Torino.* Con CXXI tavole comprendenti 398 figure. Torino, G. B. Paravia, 1910. 8° gr. XIX-426 (Prezze L. 16).

Riuniamo in un solo articolo bibliografico l'esame di queste tre opere perchè un unico concetto (benchè variamente esplicato) le informa: quello, cioè, di esporre quel tanto di geometria de-

Digitized by Google

scritiva che riesce indispensabile a chi si dedica alle arti rappresentative ed alle costruzioni.

Delle tre la più elementare è quella francese il cui programma è nelle sue linee generali conforme a quello che si svolge nei nostri Istituti tecnici, giacchè abbraccia esclusivamente figure limitate da linee rette e superficie piane. L' esposizione riveste un carattere elementarissimo e le molte figure (più di quattrocento), molte delle quali schematiche, che illustrano il testo ne rendono agevole l' intelligenza. Naturalmente l' unico metodo usato è quello di Monte; i problemi trattati sono quelli fondamentali (grafici e metrici) concernenti i punti, le rette, i piani ed i poliedri; non mancano nozioni intorno ai metodi (cambiamenti dei piani di riferimento e rotazioni delle figure) con cui si può alterare la posizione relativa delle figure che si studiano rispetto ai piani di projezione. Si è, dunque, in presenza di un' opera, che non ha grandi pretese, ma che si può dire raggiunga il proprio scopo.

Con la costituzione del Politecnico di Torino, l'antico corso universitario di *Geometria descrittiva* venne fuso con quello di *Applicazioni di geometria descrittiva;* nacque così il corso rispecchiato nel libro del Prof. Fano, di cui sta scritto il titolo in testa del presento articolo. In esso, oltre i metodi principali della classica geometria descrittiva (Metodo della projezione centrale, Metodo della doppia projezione ortogonale e Metodo dei piani quoteti) vengono esposti la *Teoria delle ombre* ed i fondamenti della *Prospettiva;* nè manca qualche cenno intorno alla projezione bicentrale, all' assonometria ortogonale od obbliqua, alla fotogrammetria ed alla costruzione degli orologi solari. L'ultimo Capitolo (Rappresentazione di alcuni apparecchi per costruzioni in pietra da taglio), al pari delle notizie intorno ai tetti (come applicazione della teoria e della rappresentazione dei poliedri), mostrano ad evidenza che il docente teneva sempre presente di annoverare fra i propri ascoltatori molti futuri ingegneri; va però notato che, avendo egli esordito con i concetti e i teoremi fondamentali della geometria projettiva, gli fu possibile di far conoscere quelle eleganti costruzioni di geometria descrittiva che traggono origine dalla teoria dell'omologia. Forse qualcuno si stupirà nell'incontrare le questioni relative alle superficie topografiche prima delle nozioni generali sopra le superficie e così troverà che queste potevano più opportunamente precedere la teoria delle ombre; ma sono queste piccole trasposizioni che l' esperto insegnante, se lo giudicherà opportuno, potrà age-

Digitized by Google

volmente effettuare, senza mutare l'economia generale dell'opera. Notiamo ancora che questa contiene numerosi esercizi, la cui esecuzione va caldamente raccomandata a chiunque voglia addestrarsi nel maneggio dei metodi propri della scienza fondata da Monge: e chiudiamo questi cenni riproducendo l'indice dell'opera, onde chiaro ne risulti il piano ai nostri lettori:

Parte I. — *Metodi di rappresentazione.* — I. Ricapitolazione di alcune nozioni di geometria projettiva. II. Metodo della proiezione centrale. III. Metodo delle projezioni ortogonali. IV. Metodo delle proiezioni quotate. V. Elementi della teoria delle ombre. VI. Elementi di prospettiva.

Parte II. — *Rappresentazione delle linee e superficie in geometria descrittiva e risoluzione dei principali problemi a cui esse danno luogo.* — VII. Nozioni generali delle linee e delle superficie in geometria descrittiva. IX. Coni e cilindri. X. Le quadriche. XI. Superficie rigate. XII. Superficie di rotazione. XIII. L'elica e gli elicoidi. XIV. Rappresentazione di alcuni apparecchi per costruzioni in pietra da taglio.

In più minuti particolari giova entrare riguardo alla terza delle opere a cui è consacrato il presente articolo. L'A., antico assistente di R. Staudigl (che dal 1838 al 1891 insegnò con gran plauso la geometria descrittiva nel Politecnico di Vienna e contribuì efficacemente a che quella disciplina fosse in Austria tenuta in debito onore dai teorici e dai pratici) pur inspirandosi, con pietà figliale, ai concetti del suo maestro, vi apportò quei ritocchi che i progressi della scienza suggeriscono e lo spirito dei tempi esige. Cultore appassionato dei metodi di Grassmann egli si inspirò all'*Ausdehnungslehre* nel proporre un coerente sistema di notazioni per le figure che si sogliono considerare nella Geometria descrittiva; alcune di tali notazioni sono già entrate nell'uso comune, altre sarebbe consigliabile lo fossero.

L'A. usa nel presente volume della sua opera esclusivamente il metodo di Monge, supponendo anzi che i suoi lettori ne conoscano i rudimenti; dedica però tutta la I Sezione del suo volume a svolgerlo ampiamente; di tal *Sezione* ecco in breve la materia. Il Cap. I riassume i concetti fondamentali di quel Metodo; il Cap. II dà notizia del cambiamento dei piani di projezione come artificio che, se anche non è, come taluni ritennero, d'insuperabile potenza, riesce utilissimo in molte circostanze. Analogo ausiliare è offerto dalle rotazioni attorno ad essi aventi posizioni speciali rispetto ai piani di projezione, delle quali si parla nel seguente Capitolo; mentre il IV spiega il significato ed enumera i vantaggi della soppressione della linea di terra,

Digitized by Google

che in Francia venne tanto validamente sostenuta da A. Mannheim. Dei problemi fondamentali grafici tratta il Cap. V; notiamo che l'A. dimostra come le soluzioni esposte siano applicabili, non soltanto quando si usi il metodo di Monge, ma per tutti i metodi di rappresetazioni governati dalle seguenti leggi: *a)* Ogni punto è rappresentato da una coppia di punti la cui congiungente ha una direzione fissa; *b)* Ogni coppia di punti del piano di rappresentazione soddisfacente a questa condizione determina univocamente un punto dello spazio; *c)* Le immagini dei punti di una retta riempiono due rette, su cui essi formano due punteggiate simili; *d)* Qualunque coppia di siffatte punteggiate determina univocamente una retta dello spazio. Da tali considerazioni, di ordine esclusivamente dottrinale, l'A. passa nel Cap. V ad altre, che può dirsi rappresentino un ponte fra la geometria e la fisica, cioè la determinazione delle ombre in solidi limitati da superficie piane, con numerose applicazioni alle figure che s' incontrano nell' architettura e nelle costruzioni. Nel regno di Euclide si ritorna col Cap. VII, dedicato all' affinità, e chiunque conosca la parte importante che tale trasforzione geometrica rappresenta nello studio del metodo di Monge non giudicherà queste pagine come un' oziosa digressione. Nel Cap. VIII vengono risolti i più importanti problemi metrici, non soltanto i più elementari, ma anche quelli più elevati, quali sarebbero la costruzione di un triedro individuato da un numoro sufficiente di facce od angoli diedri. Esso si chiude con alcune pagine che si direbbero costituire un' appendice a tutta la prima Sezione, giacchè insegnano quel gruppo di espedienti a cui è indispensabile ricorrere quando si deve operare sopra punti o rette che cadono fuori dei limiti del disegno; come congedo l'A. propone un buon numero di interessanti esercizi.

Lo scopo della II *Sezione* è l' esposizione delle proprietà fondamentali delle curve e delle superficie e la risoluzione col metodo di Monge dei principali problemi relativi. Come è naturale sono dapprima studiate le curve piane, delle quali vengono dimostrate o semplicemente enunciate le proprietà fondamentali e vengono poi risolte le principali questioni relative, tanto supponendole situate nel piano del disegno quanto nell' ipotesi che siano rappresentate col metodo di Monge, senza trascurare le costruzioni approssimate da usarsi quando si tratti di curve grafiche. Una parte di tutto ciò si conserva, ma una parte subisce radicali modificazioni, rimovendo l' ipotesi che la curva che si studia stia tutta in un piano; gli è ciò che si apprende dall' ultima parte del I Cap. della II *Sezione*, dove (ci sia lecito questo lieve appunto) avremmo amato vedere detto, più chiara-

Digitized by Google

mente di quanto appaja dalla pag. 130, che non ogni curva sghemba è rappresentabile mediante due equazioni fra le coordinate cartesiane di un punto dello spazio. Il seguente Cap. tratta delle proprietà comuni a tutte le superficie, con speciale riguardo a quelle contenenti infinite rette; come è naturale l'A. dà qualche informazione intorno ai punti doppi delle superficie e dà anche una figura (la Fig. 123), secondo lui capace di dare l'idea dell'aspetto che ha una superficie in un punto conico; ci duole di non condividere tale opinione.

Da queste generalità l'A. scende ad occuparsi di alcune linee e superficie speciali. E prima di tutto (Cap. III) si attarda sulle coniche, di cui dà una teoria elementare ma assai diffusa, su cui richiamiamo l'attenzione dei professori dei nostri Istituti tecnici, i quali spesso incontrano qualchè difficoltà nel trattare questo tema, senza invocare concetti che escono dai confini della geometria classica. Il Cap. seguente (superficie coniche, cilindriche e sviluppabili) è lunghissimo e, secondo noi, avrebbe potuto e dovuto venir spezzato in due almeno. Si trovano ivi trattate, in primo luogo, le questioni più essenziali relative alle superficie coniche e cilindriche. Segue un intermezzo sopra la teoria delle ombre per solidi limitati da superficie non tutte piane; le nozioni esposte vengono subito applicate alle superficie coniche e cilindriche (specialmente di second'ordine) ed ai solidi, che s'incontrano in pratica, risultanti dalla combinazione di tali solidi e di prismi (ad es. capitelli di colonne, modanature, cupole). Incidentalmente (e ci pare che ciò meritava un posto più distinto) l'A. fa conoscere il classico metodo ideato da Monge per costruire l'intersezione di due superficie di rivoluzione ad assi concorrenti; e poi si volge alle superficie sviluppabili, con speciale riguardo all'elicoide sviluppabile ed alle superficie di pendenza costante. Il Capitolo si chiude con le costruzioni che debbonsi eseguire per svolgere sopra un piano una superficie sviluppabile.

L'importanza teorica e pratica della sfera consigliò l'A. a consacrarle un intero capitolo (il V); nel quale, d'altronde (in vista dell'applicazione a tale superficie), vengono rapidamente esposti gli elementi della teoria del chiaro-scuro. Altre applicazioni della stessa teoria si trovano nel seguente Capitolo, da cui si apprende tutto ciò che vi è di essenziale, teoreticamente e praticamente, intorno alla superficie di rotazione, con speciale riguardo alla superficie di second'ordine. Il Cap. si chiude con un cenno intorno alle quadriche dal punto di vista proprie della Geometria descrittiva; non più di un cenno perchè a ragione l'A. pensa che tali superficie non si presentano da tale punto

Digitized by Google

di vista d' importanza comparabile a quella che possiedono nella Geometria analitica e nella Geometria projettiva. Analoghe per la genesi alla superficie di rivoluzione sono le superficie elicoidi, studiate nel Cap. VII, sia in generale, che nel caso in cui, pur senza essere sviluppabili, contengono infinite rette.

L' ultimo Capitolo dell' opera dell' egregio professore del Politecnico di Vienna tratta delle superficie rigate gobbe, che così spesso s' incontrano nella scienza delle costruzioni, e delle superficie grafiche: però le più importanti fra queste (cioè, le così dette *superficie topografiche)* troveranno la trattazione più idonea all' indole loro, nel Metodo dei piani quotati, destinato a prendere posto nel II volume dell' opera discorsa, che tutti impazientemente attendono.

Nel chiudere questo resoconto (forzatamente incompleto, malgrado la sua considerevole lunghezza) è dover nostro di far cenno delle bellissime figure che adornano l'opera del Prof. E. Müller; e bisogna essere grati ai suoi assistenti ed alla Casa editrice per il mirabile accordo spiegato onde renderne l' apparenza esterna non inferiore all' eccellenza del contenuto.

G. L.

Geometria analitica.

G. Castelnuovo. — *Lezioni di Geometria analitica.* (Seconda edizione interamente riordinata). — Roma-Milano, Società editrice Dante Alighieri. — 1909. 8° gr. p. 688 (prezzo L. 15).

In questa ristampa del suo bel trattato l' A. ha cambiato in parte il piano del libro, fidandosi sul precetto didattico, generalmente accolto, di far passare la mente del discente possibilmente per lo stesso cammino e lungo le stesse tappe principali che la scienza ha percorso nella sua formazione. Così in questa nuova edizione, a differenza dell' antica, le prime nozioni di Geometria Cartesiana precedono ogni concetto e ogni svolgimento d' indole proiettiva. Premessa dunque une breve introduzione in cui si pongono i fondamenti della geometria analitica sulle forme di 1.ª specie, l'A. dedica la prima e la seconda parte del libro a trattare i primi problemi fondamentali di geometria analitica piana e solida inerenti a punti, rette, piani e agli esempi più semplici e più istruttivi di curve e di superficie. Questi primi problemi ed esempi sono naturalmente e necessariamente i soliti considerati in quasi tutti i trattati del genere. Quello però che è a notarsi nel libro attuale, è la separazione netta dei problemi di posizione da quelli metrici, met-

Digitized by Google

tendo bene in evidenza come la risoluzione dei primi, sia indipendente dalla mutua inclinazione degli assi, mentre altrettanto non possa dirsi dei secondi (per i quali gli assi sono sempre, o quasi sempre, supposti ortogonali). Le formule per la trasformazione delle coordinate vengono date opportunamente dopo i due capitoli che riguardano la soluzione dei problemi fondamentali suddetti: dico « opportunamente » perchè tale risoluzione è indipendente dalle formule in parola e perchè il presentare subito la trasformazione delle coordinate (come si fa in molti trattati) può turbare la mente dello scolaro che non vede ancora alcuna ragione di cambiare gli assi, nè alcun problema in cui tale cambiamento sia utilizzato. Vengono poi anche introdotti gli elementi immaginarî definendoli analiticamente, presentandoli a coppie coniugate e trattando, come utile esempio, delle due rette isotrope passanti per l'origine (invarianti per trasformazioni ortogonali).

Come primo studio di curve piane particolari, si presenta il cerchio e dopo: l'ellisse, l'iperbole e la parabola: saranno poi tutte queste curve riprese, più tardi, nella parte IV^a^ esclusivamente dedicata allo studio sistematico e organico delle coniche: ma intanto è interessante dimostrare all'allievo come lo studio e la forma della curva possa desumersi dalla sua equazione. Sul cerchio sono risoluti i soliti problemi inerenti al centro, diametri, tangenti, assi radicali ecc. Seguono brevi ma succosi cenni sopra altre curve speciali: cissoide di Diocle, concoide di Nicomede, Cassinoide, Sinussoide, Cicloide ecc. Di alcune di queste è anche dimostrata qualche elegante applicazione a risolvere problemi classici, come la duplicazione del cubo (Cissoide di Diocle), la trisezione dell'angolo (concoide di Nicomede) ecc.

L'A., ispirandosi ai nostri ordinamenti scolastici, universitari, tace di proposito ogni diretta applicazione del calcolo infinitesimale alla geometria, ma però fa una eccezione dando la equazione della tangente per una curva rappresentata sotto la forma esplicita $y = f(x)$. L'eccezione è davvero lodevole giacchè l'esempio di questa ovvia applicazione del calcolo differenziale è ormai classico e d'altra parte è anche uno dei più suggestivi per dimostrare i legami intimi che collegano algebra e geometria e i vantaggi mutui che queste discipline possono ricambiarsi.

Gli elementi di Geometria analitica dello spazio corrono paralleli a quelli di Geometria piana. Fra i varî esempi di superficie è addotta la sfera, poi i coni e i cilindri e le superficie di rotazione. Delle linee è indicata la rappresentazione parametrica. Per quanto i sistemi Cartesiani adottati siano sempre supposti ortogonali, però, come utile esercizio sono anche indicate, in

Digitized by Google

molti casi, le formole inerenti ad assi obliqui, lasciando all' allievo la iniziativa di rendersene ragione.

Si giunge così alla III^a parte del libro che è esclusivamente dedicata alla geometria proiettiva e divisa in sei capitoli. Il primo contiene le nozioni fondamentali della geometria di posizione: forme geometriche elementari, elementi impropri, legge di dualità ecc.: alla fine del capitolo vengono introdotte le coordinate omogenee di punto, di retta, di piano.

Nel capitolo 2° si presenta per la prima volta la nozione di birapporto di una quaterna d' elementi di una forma di 1^a specie, insieme a tutte le principali proprietà che ne mettono in evidenza la grande importanza. Ne consegue la definizione di gruppo armonico e i varii modi di esprimere analiticamente l' armonia di un gruppo.

Dalle proprietà esposte sui birapporti discendono anche, con tutta facilità, le nozioni di coordinate proiettive di punto e retta nella geometria piana; di punto, retta e piano nello spazio, con le quali nozioni si chiude il capitolo. Il seguente (il 3°) è completamente dedicato alla proiettività fra forme di 1^a specie ed è uno dei capitoli meglio riusciti. La definizione accolta è quella di Steiner, ma se ne deducono subito e facilmente tutte le altre più in uso (fra cui quella di Staudt) e, in ultimo, anche la definizione analitica (mediante la relazione bilineare). L' A. passa poi a riguardare il caso in cui le sedi coincidono, onde si presenta così la considerazione degli elementi uniti di cui l' A, assegna subito la costruzione diretta utilizzando una semplice proprietà del cerchio: il vantaggio è indiscutibile, perchè quando si voglia far dipendere la costruzione in parola dalla teoria delle serie proiettive su di una conica (come accade in quasi tutti i trattati), si è generalmente obbligati a ritardare di troppo la costruzione (e, didatticamente, nulla è più sconsigliabile di dimostrare la esistenza di un qualsiasi ente geometrico senza darne subito una costruzione).

Il capitolo 4° è dedicato all' involuzione che viene presentata come quella particolare proiettività che coincide con la propria inversa. Ne conseguono le proprietà principali dedotte, in gran parte, dalla rappresentazione analitica della involuzione (la relazione bilineare simmetrica). Il vantaggio di aver dato nel capitolo precedente la costruzione degli elementi uniti, qui si afferma anche di più perchè permette di determinare gli elementi doppi di una involuzione iperbolica con una indiscutibile economia grafica di linee sulla costruzione più ordinaria, e perchè infine conduce subito e facilmente a risolvere il problema importante della coppia comune a due involuzioni situate sulla

Digitized by Google

medesima sede. Il capitolo ha termine con un breve cenno sopra la rappresentazione geometrica degli elementi immaginarî di una forma di 1.a specie (il quale cenno poteva invero ommettersi senza togliere alcun pregio al libro).

Gli ultimi due capitoli di questa III^{a} parte sono dedicati alle proiettività fra forme di 2.^{a} specie e fra forme di 3^{a}. Vi sono esposte le proprietà grafiche essenziali e i casi più notevoli dell'omologia. Dal punto di vista analitico è posto bene in evidenza come la proiettività equivalga ad una trasformazione lineare: vi si dimostra come si possa risolvere il problema degli elementi uniti nel caso della collineazione, e quello degli elementi corrispondenti incidenti nel caso della correlazione, da cui è breve il passo alle polarità, dando così il modo all'A. di presentare per la prima volta e in tutta la loro generalità le coniche e le quadriche (alle quali saranno poi dedicate le successive parti IV^{a} e V^{a} del libro). Nel capitolo delle proiettività spaziali era forse opportuno separare il caso assiale da quello biassiale anche perché quest'ultimo conduce alla involuzione gobba (di cui, ad esempio, è importante, come caso particolare metrico, la simmetria rispetto a una retta).

***

A questo punto del libro può dirsi che sieno apprestati i due strumenti principali (il proiettivo e l'analitico) per lo studio delle coniche e delle quadriche a cui è consacrato il rimanente dell'opera. Il potersi servire dell'uno, o dell'altro dei due strumenti suddetti a seconda del genere della questione che si vuol trattare, abbrevia e semplifica di molto il cammino. Cominciamo dalle coniche alle quali è destinata la parte IV^{a} (divisa in sei capitoli). Premesso un breve cenno storico, l'A. parte dalla definizione puramente analitica mediante una equazione di 2° grado (a coefficienti reali) nelle coordinate Cartesiane di un punto, e ne deduce subito le prime proprietà inerenti alle intersezioni con una retta, al numero dei punti che determinano la curva, alla equazione della tangente in un punto dato e a tutta la teoria della polarità che l'A. riattacca opportunamente alla polarità piana già presentata nella parte III^{a}.

Il capitolo successivo sulle coniche, ha carattere prevalentemente costruttivo e può dirsi dedicato in gran parte a risolvere, in tutti i casi possibili, il problema di costruire una conica quando sieno dati p punti e t tangenti in modo che si abbia $p+t=5$. A tale scopo, premessa la generazione proiettiva delle coniche, vengono esposti i teoremi di Pascal, di Brianchon e di Desargues con tutti i casi particolari relativi e principali corollari. Seguono poi alcune considerazioni analitiche inerenti

Digitized by Google

ai fasci e alle schiere di coniche, con speciale riguardo al caso in cui alcuni, o tutti i punti-base del fascio sieno coincidenti: l'A. ne approfitta per stabilire la esistenza del cerchio osculatore a una conica in un suo punto qualunque, dandone in forma assai semplice la equazione che lo rappresenta.

Il capitolo che segue è espressamente dedicato alle proprietà diametrali delle coniche, al centro, agli asintoti, agli assi distinguendo i tre casi metrici della ellisse, iperbole e parabola. Preparato così il terreno, nulla di più semplice vi è di passare alle forme ridotte dell' equazione delle coniche tanto per quelle dotate di centro, quanto per la parabola, il che forma l'oggetto del capitolo 4.°. L'A., dopo avere messo in evidenza tale riduzione nei casi più notevoli, viene poi alla considerazione degli invarianti per trasformazioni di coordinate e dimostra quanto e come questi invarianti possano giovare abbreviando i calcoli inerenti alla riduzione suddetta. Il capitolo termina con i teoremi di Apollonio sopra i diametri coniugati delle coniche centrali.

Segue la teoria dei fuochi e direttrici a cui è espressamente dedicato il capitolo 5.° La definizione di fuoco è quella ormai comunemente adottata (come centro di un fascio di raggi a due, a due ortogonali e coniugati rispetto alla conica). Dimostrata la esistenza dei fuochi separatamente nei tre casi dell'ellisse, iperbole e parabola, se ne fa applicazione a esporre le proprietà più salienti che vi si collegano, sia dal punto di vista angolare che segmentario. Il capitolo finisce con quelle nozioni sui sistemi di coniche confocali che conducono a stabilire i sistemi di coordinate ellittiche nel piano.

Finalmente il capitolo 6.° tratta rapidamente delle coniche unite in collineazioni piane considerando particolarmente il caso dell' omologia e dell' affinità.

Siamo così giunti all' ultima parte del nostro libro (la V^a) espressamente dedicata allo studio delle quadriche. Essa procede e si svolge per quanto è possibile parallela a quello delle coniche: anche i titoli dei varii numeri che la compongono richiamano nello stess' ordine le questioni analoghe trattate nelle coniche.

Così il capitolo 1.° è destinato particolarmente alla polarità rispetto a una quadrica (come il 1.° della parte IV^a era dedicato alla polarità rispetto a una conica). Premessa la forma generale dell' equazione di una quadrica, si passa a considerare le sue intersezioni con una retta e con un piano, onde ne segue la nozione di rette tangenti e di piano tangente in un suo punto. Sul quale argomento, in apposita Nota, si mette bene in evi-

Digitized by Google

denza il caso, meno facile a concepirsi dal lato della intuizione geometrica, delle quadriche convesso-concave, in cui ogni piano tangente seca la superficie secondo due rette reali e la tocca nel loro punto comune. La teoria della polarità si svolge poi nella sua pienezza soffermandosi particolarmente sugli enti coniugati a coppie, sulle figure autoconiugate ecc. In ultimo si considerano le quadriche degeneri e la teoria della polarità nel caso del cono (come figura della stella che ha il centro nel vertice).

L' argomento del capitolo 2.° è l' unico che non abbia il suo riscontro nella teoria delle coniche. Esso infatti parte dalla nozione di punti ellittici, iperbolici e parabolici di una quadrica dimostrando che sulla stessa superficie non possono esistere punti di specie differenti. Dopo di che sono particolarmente studiate le due quadriche rigate gobbe e relative serie rigate (di cui vengono esposte le più notevoli proprietà proiettive). Gli ultimi numeri riguardano i fasci e le schiere di quadriche.

Nel capitolo seguente vengono svolte le proprietà diametrali, quelle inerenti al centro, al cono-asintoto e ai piani e direzioni principali distinguendo il caso delle quadriche centrali (ellissoide, iperboloide a una e a due falde) da quello dei paraboloidi (ellittico e iperbolico). Dopo di che si presenta naturalmente la teoria delle quadriche di rotazione. Alla fine del capitolo tutta la teoria delle direzioni principali viene nuovamente esposta ponendola opportunamente in relazione coll' assoluto dello spazio. Notevole è, ad esempio, il modo col quale si può esprimere che una quadrica sia di rotazione (la sua conica all' infinito deve essere bitangente all' assoluto).

Si perviene così alla riduzione dell' equazione di una quadrica alle forme notevoli più in uso (in tutti i casi possibili). E' oggetto di questa riduzioue il penultimo capitolo. Delle forme semplici trovate l' A. approfitta per dimostrare ancora una volta quanto e come esse possano essere di aiuto nello studio della forma delle superficie. La teoria degli invarianti che segue semplifica la riduzione in parola e ne deriva la classificazione delle cinque specie di quadriche proprie.

Nell' ultimo capitolo è svolta la teoria delle sezioni circolari, degli ombelichi, delle quadriche confocali facendo largo uso dell' assoluto dello spazio il che semplifica molte considerazioni e alla intuizione geometrica giova in modo particolarmente efficace.

L' appendice riguarda la risoluzione dei problemi geometrici e l' uso dei relativi strumenti di disegno. Ivi sono riprese le idee che l'A. ebbe già a esprimere sull' argomento in un arti-

Digitized by Google

colo di « *Collectanea* » ormai ben conosciuto (1). Nel libro attuale tali idee vengono svolte con quella maggiore elasticità e sveltezza che provengono dal potere fare uso sistematico e più largo di un maggior corredo di cognizioni.

Così l'esame del libro è finito. Questa rapida corsa attraverso gli argomenti trattati non è certamente sufficiente a porre in luce, quanto dovrebbe, i molti pregi. Il libro va letto e meditato (specialmente dal punto di vista didattico). Si vedrà allora fra tutti i meriti primeggiare ciò che si suol chiamare « il senso della misura ». Pensando al doppio ordine di lettori a cui il libro è destinato (allievi ingegneri e allievi insegnanti) non si potrebbe davvero immaginare una migliore e più giusta distribuzione delle varie parti che lo compongono! Il metodo proiettivo e l'analitico si soccorrono l'un, l'altro, in modo ammirevole (forse però non si fondono insieme tanto quanto sarebbe desiderabile, ed è forse questo l'unico appunto che può farsi al libro).

Un certo numero di paragrafi segnati con asterisco, possono ommettersi in una prima lettura, secondo il consiglio dell'A. Io suggerirei piuttosto che fossero addirittura tralasciati da chi si avvia agli studi applicativi dell'ingegneria e ne esigerei invece la lettura e lo studio dai giovani diretti alla scienza.

Un buon numero di utili esercizi sagaciamente ordinati, che in molti casi si raggruppano in teorie ausiliarie, è intercalato a ogni passo nel testo insieme a brevi cenni storici nei punti più adatti. Il libro si chiude con un formulario che particolarmente per le applicazioni della Geometria analitica al calcolo infinitesimale e alla meccanica, riesce di non dubbia utilità.

Quinto al Mare, 25-VII-10.

E. Ciani.

(1) Questioni riguardanti la geometria elementare trattate da varii autori e raccolte da F. Enriques. — Bologna - Zanichelli 1900. L'articolo di Castelnuovo è a pag. 313.

Digitized by Google

Opere complete ed Enciclopedie.

Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierend von H. Weber u. Wellstein. III Band. *Angewandte Elementar-Mathematik* bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein u. R. H. Weber. Mit. 358 Eiguren in Text, Leipzig: Teubner — 1907 (S. XIV+666, prezzo Mk. 14).

Il titolo di quest'ultimo volume della *Encyklopädie der Elementar-Mathematik,* qualora si interpreti in senso un po' ristretto, può indurre in errore circa il contenuto del libro. Giova quindi avvertir subito come qui non si tratti di esempi e di illustrazioni direttamente connesse alle teorie svolte nei due volumi precedenti, e come gli Autori si siano, in quella vece, proposti il compito più arduo e più elevato di mostrare, su vari esempi caratteristici, in qual modo e in qual misura i concetti e i metodi matematici possan trovare applicazione nello sviluppo delle altre Scienze.

Data l'ampiezza del campo su cui poteva esercitarsi la scelta degli Autori, e tenuto conto, d'altra parte, dei limiti, relativamente ristretti, prefissati a questa *Enciclopedia* — ben si comprende *a priori* come quelle *Applicazioni* non potessero in nessun modo riuscir complete. Ma sarebbe qui altrettanto facile quanto inopportuno il trattenersi a rilevar lacune o a suggerir proposte postume di scelte e di assetti diversi. Ciò che importava sopratutto si era che qui si trovassero raccolti esempi veramente caratteristici pei vari tipi possibili di applicazione dello strumento matematico alle indagini scientifiche; e sotto questo riguardo parmi senz'altro che gli Autori abbiano avuto mano felice.

I cinque Libri, di cui si compone il volume, sono dedicati, rispettivamente, alla *Meccanica,* alla *Teoria delle linee di forza elettriche e magnetiche,* ai *Massimi e minimi,* al *Calcolo delle probabilità* e infine ai *Metodi grafici.*

Questi cinque libri sono fra loro indipendenti e assai diversi per estensione ed elevatezza. Naturalmente non è in essi grande ampiezza di sviluppi matematici; ma, in accordo con gli scopi dell'opera, il loro piano è sopra tutto coordinato a mettere in chiara luce i concetti fondamentali e a fornire una formulazione logica rigorosa dei principi generali, che informano le singole teorie scientifiche considerate.

Così nel I Libro (pagg. 1-170) la trattazione della Meccanica, diversamente da quanto accade solitamente nei trattati elementari, è sostanzialmente informata ai concetti e ai principi

Digitized by Google

generali della Energetica; nè meno interessante è il II Libro (pagg. 171-310), dovuto come il I ad R. H. Weber, in cui la teoria matematica dei campi elettrici e magnetici è sviluppata nelle sue linee generali in base all' uso sistematico del concetto di linee di forza.

E' singolare come, in tutta questa trattazione, l'A. abbia voluto vietarsi l' uso di ogni concetto, anche elementarissimo, di Calcolo infinitesimale, limitandosi, là dove è stato costretto a considerare la circuitazione di un vettore lungo una linea chiusa, a mascherare il concetto di integrale sotto la forma di somma. Per quanto l'A. sia riuscito con singolare abilità a dissimulare gli effetti della sua rinuncia, codesta esclusione degli strumenti di calcolo più possenti e meglio adeguati alle esigenze dell' argomento appare senz' altro artificiosa. Già sarebbe sembrato più naturale e più opportuno che gli A., nella parte generale di questa Enciclopedia, avessero trovato un posto, accanto all' Algebra, per gli elementi del Calcolo infinitesimale; e in ogni caso poi avrebbero potuto qui presupporre senz' altro come noti i concetti e le prime proprietà di derivata e d' integrale, tanto più che questa *Enciclopedia,* per quel certo suo carattere di elevatezza che ne costituisce forse uno dei pregi salienti, non è tale certamente da potersi considerare lettura possibile e proficua per chi degli studi matematici sia ancora pressochè digiuno.

Nel III Libro (pagg. 311-352) H. Weber discute dapprima i problemi fondamentali di massimo e minimo della Planimetria sia in base alle eleganti considerazioni sintetiche dello Steiner, sia ricorrendo a discussioni algebriche elementari; e poi, accennato alle applicazioni della teoria dei massimi e minimi ai problemi di equilibrio, si trattiene più particolarmente sulla teoria della capillarità.

Allo stesso H. Weber è dovuto anche il IV libro (pagg. 353-404) dedicato al Calcolo delle probabilità, del quale qui l'A. analizza i fondamenti logici e le definizioni da un punto di vista che gli è personale (1) e discute le applicazioni alla valutazione degli errori di osservazione.

E qui l' opera volge oramai alle applicazioni più immediatamente pratiche, e nell' ultimo Libro (pag. 405-644) il Wellstein si occupa dei Metodi grafici. Egli riassume anzitutto, senza dilungarsi sulla considerazione di problemi particolari, i principii dei varii metodi rappresentativi della Geometria Descrittiva;

(1) Cfr. il suo discorso « *Ueber Kausalität in den Naturwissenschaften* » (Leipzig, Engelmann, 1881) e le sue osservazioni alla trad. tedesca di POINCARÉ: *La Valeur de la Science.*

Digitized by Google

espone quindi i principi teorici e i problemi fondamentali della Statica grafica, e, a mettere in luce l' interesse geometrico dî siffatte teorie, si indugia sulla deduzione, per via statica, delle formole fondamentali relative alle coordinate trilineari e aggiunge un breve cenno sulla Astatica. Il libro si chiude con un interessantissimo capitolo sulla teoria dei sistemi articolati piani, della quale è messa in evidenza l' elegante applicazione alla risoluzione grafica dei sistemi di equazioni lineari.

Si chiude così degnamente quest' opera, alla quale si possono certamente muovere, da vari punti di vista, appunti e critiche; ed io stesso, intrattenendomi su questo e sui precedenti volumi, ebbi occasione ad accennare a qualche manchevolezza, che parvemi di poter riscontrare nel disegno generale di questa Enciclopedia o in qualche parte speciale di essa. Ma, raccogliendo in un giudizio sintetico le impressioni ricevute nella lettura dei tre volumi, parmi doveroso rendere omaggio alla larghezza di vedute a alla elevatezza di criteri, secondo cui l' opera fu concepita ed attuata. Alle preoccupazioni logiche e critiche che dominano sopratutto nel secondo volume fa riscontro e quasi direi equilibrio il nobile sforzo, con cui gli A., in questo volume ultimo, hanno saputo coordinare in un quadro così vario e suggestivo i diversi tipi di problemi scientifici, a cui i concetti e i metodi matematici sanno utilmente piegarsi e adattarsi. Non sarà quindi fuor di luogo il ripeter qui il voto, già espresso quando uscì in luce il primo volume, che questa Enciclopedia non sfugga alla attenzione dei colleghi delle Scuole Medie, ai quali sopra tutto hanno inteso rivolgersi gli Autori, quando idearono l' opera loro.

UGO AMALDI.

Gesammelte mathematische Werke von ERNEST SCHERING. *Herausgeßeben von* ROBERT HAUSSNER und KARL SCHERING. I Band mit Ernest Scherings Bild, 1902 (p. VIII+412). II Band. 1909 (p. VIII+472). 4.° Berlin, Meyer und Müller (Prezzo complessivo Mk. 50).

Con costanza ed entusiasmo ammirabili la Germania prosegue la pubblicazione delle opese complete dei suoi più eminenti matematici del secolo decorso; dopo Jacobi, Steiner, Möbius, Riemann, Hesse ottennero tale onore Borchardt, Dirichlet, Grassmann e Fuchs; mentre ancora lo attendono Kummer e Clebsch, fu intrapresa la pubblicazione delle opere complete di Kronecker e Weierstrass; od oggi annunciamo due nuovi poderosi volumi ove è compendiata l' opera originale del beneme-

Digitized by Google

rito editore delle opere di Gauss. Quelli fra i nostri lettori che seguirono il *Bollettino* sino dalle sue origini ricorderanno come il primo fascicolo di esso contenga un cenno necrologico di questo egregio scienziato, nonchè un elenco degli scritti da lui pubblicati (T. I, 1898, p. 26-29); ricorrendo all' uno ed all'altro è agevole prevedere il contenuto dei due volumi che oggi annunciamo. Ma questi, grazie alla minuziosa cura ed all'affettuosa sollecitudine spiegate dagli editori, contengono qualche cosa di più; cioè, non solo le note inserite come commenti ad alcuni passi delle opere di Gauss, ma alcune pagine inedite trovate fra le carte dell' illustre estinto: ne riferiamo i titoli a complemento del surricordato Elenco:

Dimostrazione del teorema di Dirichlet, che qualunque forma quadratica propriamente primitiva può rappresentare infiniti numeri primi.

Necrologia di B. Riemann.

Necrologia di Gauss.

Sopra un pendolo invariabile atto a determinare l' accelerazione della gravità.

Due problemi sul calcolo delle rendite.

Art. 18 della memoria: « Das Anschliessen einer Function an algebraischen Functionen in unendlih vielen Stellen ».

Nuova soluzione del problema di Keplero.

Chiude il volume una biografia della Schering assai più particolareggiata di quella che potè accogliere nelle sue colonne un periodico delle modeste proporzioni del *Bollettino*. In essa, fra l' altro, trovò posto la completa enumerazione degli argomenti svolti dallo Schering nelle sue lezioni presso l' università di Gottinga; non è escluso che alcune di esse possano uscire in luce per opera di coloro che presiedettero alla preparazione della pubblicazione su cui oggi richiamiamo l'attenzione del pubblico matematico.

G. L.

Haton de la Goupillière. *Mémoires divsrs.* Seconde édition. Paris, Guthier-Villars, 1909. 4.° p. 52.

Gli scritti raccolti in questo volume sono ben noti, specialmente ai cultori della teoria delle curve piane, i quali saranno grati all' illustre autore di averli adunati per metterne in luce la stretta interdipendenza. Trattandosi di lavori omai giudicati basterà che ne riferiamo i titoli:

De la courbe qui est sa propre podaire.

Tautochronisme des épycicloïdes quand on a égard au frottement.

Digitized by Google

De la similitude en thermologie.
Theorèmes relatifs à l'actinométrie des plaques mobiles.
Des centres de courbure successifs.
Centres des moyennes distances des centres de courbure succesifs.

G. L.

Didattica.

MANNOURY G. — *Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik.* Haarlem, P. Visser, 1909, 8° pag. 280.

Il libro, come desumiamo dalla prefazione, è un sunto delle lezioni, che l'A. da varî anni tiene nell'estate per gl'insegnanti di Matematica, e si propone di trattare in modo comprensibile, anche a chi non ha fatto studî preliminari di filosofia, le principali questioni, che si collegano ad un fondamento filosofico della matematica.

L'opera si divide in due parti, delle quali la prima, è dedicata alle questioni connesse coi fondamenti dell'aritmetica, la seconda invece a quelle relative alla geometria.

Il primo argomento trattato dall'A. è quello del concetto di unità e di pluralità: l'A. mostra con sottile analisi tutte le difficoltà, che s'incontrano nel volerlo stabilire, e come si cade in un circolo vizioso, dal quale si può escire soltanto postulando una « cosa-per-noi » ed una « relazione-per-noi ». Appunto con un tale punto di partenza e con un'acuta trattazione, sulla quale qui non possiamo entrare, l'A. deduce il concetto di ordine nel tempo, e dipoi una definizione di unità. La trattazione non mi sembra del tutto soddisfacente, e ad essa si potrebbero muovere varie obbiezioni; però si deve tener conto, che l'A. stesso dichiara di non poter entrare nei particolari, e di contentarsi di mostrare la possibilità di arrivare, con dati puramente soggettivi, a quel concetto in modo, che possa poi servire ad uno sviluppo ulteriore dell'idea di numero. L'esposizione, improntata al concetto monistico, termina con una confutazione notevole del punto di vista dualistico.

Nel 2.° capitolo, intitolato « Il numero: il finito e l'infinito », si stabilisce il concetto di numero, partendo, con il Cantor, dalla definizione di « ugual potenza » di due molteplicità, e si passa poi a far vedere come, sempre da quella definizione, si possa dedurre la distinzione tra numeri finiti ed

Digitized by Google

infiniti; si osserva infine come l'esperienza in questo campo non abbia alcun valore.

Nel 3.° capitolo, sulle « proprietà fondamentali dell'aritmetica », l'A. dal concetto d'insieme bene ordinato deduce in modo rigoroso ed insieme elegante le proprietà della serie naturale dei numeri interi, e di qui poi una definizione genetica di numero; a questo proposito discute poi, dal punto di vista filosofico, il principio d'induzione completa, negando ad esso il carattere di giudizio sintetico a priori.

Nei due capitoli seguenti, dopo avere accennato all'estensione delle operazioni ai numeri transfiniti di Cantor, e trattone un ordinamento delle potenze (Mächtigkeiten) transfinite, l'A. parla del principio di permanenza, delle varie estensioni del campo dei numeri interi (numeri negativi, razionali, reali), e della relazione tra grandezza e numero.

La II parte è dedicata alla geometria, ma nel 1.° capitolo l'A. tratta della logica matematica, che gli dovrà poi servire come strumento e di cui l'A. stesso si dimostra partigiano convinto ed efficace. E dalla critica del simbolismo l'A. è portato a completare la discussione sul principio d'induzione completa, e a trattare della compatibilità dei postulati.

Nel 2.° capitolo, dopo avere spiegato il concetto della geometrografia del Lemoine, applica il simbolismo alla geometria, dimostrando, che ogni costruzione (ed ogni teorema) si può rappresentare mediante un numero finito di simboli. Per la geometria proiettiva fa vedere, che, considerata la retta come un ente P|Q determinato da due punti P, Q e tale che due rette α, β abbiano sempre un punto comune $\alpha \times \beta$, occorre postulare, che

$$P|Q = Q|P;\ \alpha \times \beta = \beta \times \alpha;\ A|B \times B|C = B;\ \alpha \times \beta|\beta \times \alpha = \beta$$

ed inoltre, che valga il teorema di Desargues (1) (che l'A., seguendo l'Hilbert, dimostra non dipendere dalle proprietà precedenti), dopo di che si può costruire formalmente tutta la geometria proiettiva. Passando poi alla geometria metrica, viene studiato il concetto di movimento rigido di un corpo, e da un fondamento rigoroso di esso con acute osservazioni vien tratto, che il concetto stesso è relativo al campo di osservazione, e che i fondamenti della geometria anche da questo punto di vista non dipendono dalla esperienza.

(1) Noterò, che pur rimanendo le stesse le conclusioni, van cambiate alcune delle affermazioni, conoscendosi oggi una dimostrazione planimetrica di un teorema, di cui quello di Desargues è conseguenza immediata (Bellatalla, Dimostrazione planimetrica del teorema dei triangoli omologici – *Period. di Mat.* Vol. XXIII, 1908).

Digitized by Google

Il 3.° capitolo è dedicato alle Geometrie non euclidee, sulle quali l'A. si diffonde un po' più a lungo del solito, sostenendo la loro uguale legittimità sia di fronte alla logica, che di fronte alla esperienza; anzi da quest' ultima conclusione trae un nuovo argomento per negare, che la geometria sia una scienza sperimentale.

L' ultimo capitolo è intitolato « considerazioni generali sul concetto di spazio »; queste osservazioni, che non possiamo riassumere qui in poche parole, non risolvono certo la questione ben complicata, ma molte di esse, notevoli ed acute, gettano parecchia luce sulla natura del concetto in discussione.

Ho cercato così di dare in poche parole un' idea del contenuto del libro; aggiungerò ancora, che sparse quà e la vi si trovano abbondanti note, che riportano numerosi brani di autori (il più delle volte contrarî alle teorie svolte nel testo) ed accenni storici sullo sviluppo delle varie questioni (1). Le prime servono a dare un' idea delle varie correnti filosofiche, che si contendono il campo in questa materia; le seconde contribuiscono a rendere chiare le ragioni, che hanno originate le varie questioni.

Pur senza discutere le idee espresse dall'A., non sempre pienamente giustificate nel libro, e in alcune delle quali non saprei consentire, come conclusione dirò solo, che a mio parere l'A. ha raggiunto pienamente lo scopo prefissosi, soprattutto per il carattere di necessità, che egli ha saputo dare all' impostazione delle questioni, e per la chiarezza, con cui tali questioni sono discusse, se non sempre risolte.

SIRO MEDICI

Determinanti.

G. KOWALEWSKI — *Einführung in die Determinantentheorie einschliesslich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten.* Leipzig, Veit e Comp., 1909, 8° p. V + 550 (Prezzo Mk. 15).

Il contenuto di quest' opera è assai più ricco di quanto potrebbe credersi dal modesto suo titolo. Essa può dividersi in due parti, dedicate, l' una alla teoria dei determinanti, l' altra,

(1) Tra questi noterò due pagine, in cui, con ragioni in gran parte giuste, viene combattuta la pretesa di Gauss (ammessa poi generalmente) di avere scoperti, se non pubblicati, avanti di Bolyai e di Lobatcheski, i loro stessi risultati.

Digitized by Google

molto più estesa, alle applicazioni. È inutile fermarsi sulla prima (Cap. 1-10); importa piuttosto dire qualche cosa della seconda (Cap. 11-19).

Il Cap. 11 tratta dei risultanti e discriminanti. Trovato il risultante di due forme binarie col metodo dialitico, e determinata la condizione perchè due forme abbiano più fattori lineari comuni, si stabilisce il carattere invariantivo del risultante, e si calcola il risultante di due forme di egual grado col metodo di Cayley; poi si definisce il discriminante e se ne danno le espressioni diverse. Il Cap. 12 è dedicato ai sistemi di forme lineari ed alle forme bilineari e quadratiche. Nel Capitolo 13 si espongono i principî della teoria dei divisori elementari, e se ne fa l'applicazione alle forme quadratiche ed alle forme di Hermite. Il Capitolo 14 tratta dei determinanti funzionali, dei sistemi di funzioni e delle funzioni implicite; il Cap. 15 della indipendenza lineare di più funzioni d'una variabile e dei determinanti di Wronski e di Gram. Il Cap. 16 contiene alcune applicazioni geometriche dei determinanti: equazione della retta e del piano, area del triangolo e volume del tetraedro, raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo e della sfera circoscritta ad un tetraedro, condizione perchè 4 o 5 punti stiano su un cerchio o su una sfera, collineazioni, grandezza d'un insieme, interpretazione geometrica del determinante funzionale. Infine i Cap. 17, 18 e 19 offrono un'esposizione sistematica della teoria dei determinanti infiniti, dei determinanti di Fredholm e delle equazioni integrali.

La scelta felice degli argomenti e l'esposizione chiara e ordinata fanno della nnova opera di Kowalewski un libro di facile e gradita lettura, che vorremmo vedere tra le mani di tutti gli studiosi d'analisi.

G. Vivanti

Teoria delle Superficie.

Federigo Enriques et Francesco Severi — *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques,* couronné par l'Académie des Sciences de Paris, (Prix Bordin 1907 [1]) — Acta mathematica, T. 32 (1909) pp. 283-392, T. 33 (1910) pp. 321-403.

Questa Memoria contiene lo studio sistematico di una vasta classe di superficie algebriche a cui si è rivolta l'attenzione dei

(1) Vedi la relazione di Humbert nei *Comptes Rendus* (T, CXLV. II° sem. 1907, n.° 23).

Digitized by Google

cultori di geometria, dopo che i risultati ottenuti da eminenti matematici fra cui Poincaré, Picard, Appell, Humbert, Painlevè intorno alle funzioni Θ e alle funzioni quadruplamente periodiche di due variabili, insieme a quelli che più particolarmente riguardano la geometria sopra le superficie algebriche, frutto di brillanti e profonde ricerche a cui hanno contribuito in modo assai vasto e completo gl' italiani, permisero al Picard e al l' Humbert di stabilire alcune notevolissime proprietà delle superficie iperellittiche, sia legate alla rappresentazione parametrica, sia più strettamente connesse alla teoria delle trasformazioni birazionali. Gli A., pur presentando nel loro lavoro un quadro completo dei principali risultati precedenti, hanno destinato la maggior parte di esso all' esposizione delle loro ricerche personali. da cui la teoria delle superficie iperellittiche ha ricevuto un assetto che, per quanto riguarda i teoremi generali e le classi di superficie studiate nella Memoria, può dirsi, quasi sotto tutti i punti di vista, definitivo. L' esposizione riassuntiva dei principali risultati trovasi in due Note (1) pubblicate precedentemente dagli A., e contemporanee a due altre (2), dovute ai Sigg. Bagnera e de Franchis i quali si sono occupati, pure con ottimo profitto, dell' interessante argomento, traendone, simultaneamente e indipendentemente dagli A., analoghe conclusioni che si prestano a utilissimi raffronti, su qualcuno dei quali ci dovremo intrattenere nel seguito.

Trattandosi di un lavoro originale, di mole considerevole, e intorno ad un argomento la cui conoscenza non è largamente diffusa, il lettore mi perdonerà se dovrò fare uso di una esposizione riassuntiva non eccessivamente breve. E' noto, in virtù di un classico teorema di Weiertrass, che se si esprimono le coordinate di un punto in un S_r mediante funzioni quadruplamente periodiche di due variabili, queste risultano legate da r-2 relazioni algebriche indipendenti, di guisa che il punto descrive una superficie *algebrica* che, per la natura della sua rappresentazione parametrica si chiama, (con denominazione di Humbert) *iperellittica*. Le proprietà di una tale superficie dipendono, a una prima classificazione, in modo essenziale da due interi caratteristici legati alla rappresentazione parametrica: l' uno di essi,

(1) *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, vol. XVI, 1° sem. 1907, s. V, fasc. 7° e vol. XVII, 1° sem. 1908, s. V, fasc. 1°.

(2) *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, vol. XVI, 1° sem. 1907, s. V, fasc. 7° e vol. XXI, 1° sem. 1907, s. V, fasc. 8.° La Memoria « in extenso » trovasi nelle *Memorie della Soc. Italiana delle Scienze (detta dei XL)*, s. 3ª T. XV.

Digitized by Google

(divisore della superficie), è l'intero δ che figura nella tabella dei *periodi primitivi* dei parametri u, v, ridotti alla forma *normale*

$$(1)\qquad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta} \end{matrix} \begin{matrix} g & h \\ h & g' \end{matrix}, \quad \left\{ \begin{matrix} g = g_1 + i g_2 \\ g' = g'_1 + i g'_2 \end{matrix} \quad h = h_1 + i\, h_2,\ g_1 g'_1 > h_1^2 \right\},$$

l'altro, *(rango* della superficie), è il numero delle coppie u, v incongrue rispetto ai periodi (1) che corrispondono ad un medesimo punto della superficie. I risultati più importanti su questo argomento e precedenti alla ricerca di cui trattiamo si riferivano alle superficie iperellittiche di rango 1 (sup. di Picard), e alle superficie regolari di rango 2, oggetto di notevoli ricerche del sig. Humbert.

Premessa la definizione trascendente, gli A., vi sostituiscono subito una definizione geometrica assai semplice introducendo la sup. di Jacobi che rappresenta le coppie (non ordinate) di punti d'una curva di genere 2 e che, come risulta dal problema d'inversione, è una sup. iperellittica di rango e divisore eguali all'unità. L'importanza di questa superficie come base per la ricerca, risulta dal fatto che ogni altra superficie iperellittica la ammette come trasformata razionale: più precisamente ogni sup. iperellittica di rango r e divisore δ corrisponde ad una involuzione d'ordine r δ sopra una sup. di Jacobi.

Fra queste involuzioni si presentano spontaneamente come più importanti perchè la loro esistenza non implica alcuna condizione per i moduli della sup. di Jacobi, quelle che sono ivi generate dalle ∞^2 trasformazioni birazionali che vi hanno sede. Tali trasformazioni (rispettivamente di 1ª e 2ª specie), definite in modo trascendente dalle equazioni

$$(2)\qquad \begin{matrix} u' + u \equiv \lambda \\ v' + v \equiv \mu \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u' - u \equiv \lambda \\ v' - v \equiv \mu \end{matrix} \qquad \text{(modd. periodi)},$$

con λ. μ costanti, sono atte a definire involuzioni allora e soltanto che risultano periodiche. Ciò succede sempre per le trasformazioni di 1ª specie le quali sono involutorie, mentre generalmente non si verifica per le trasformazioni di 2ª specie. Tuttavia, lasciando da parte il 1° caso di cui si parlerà nel seguito, ad ogni intero assegnato δ corrisponde un numero finito di tra-

(1) Cfr. Picard et Simart, *Théorie des fonct. algébriques de deux variables indép.* T. 2° cap. 14, Humbert, *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques*, Journal de Mathématiques 1893. s. IV, T. IX.

Digitized by Google

sformazioni di 2ª specie cicliche d' ordine δ, e perciò atte a generare involuzioni I_δ sopra la superficie. Orbene in corrispondenza a queste involuzioni si ottengono *tutte* le sup. iperellittiche di rango 1 e di divisore δ. Le proprietà di queste, salvo la differenza dovuta al valore del divisore, presentano perfetto riscontro con quelle della sup. di Jacobi; caratteristica fra esse è la proprietà di possedere un gruppo continuo ∞^2 permutabile di trasformazioni birazionali (di 2ª specie), come pure quella di possedere due integrali semplici di 1ª specie e una curva canonica d' ordine o. Quest' ultima condizione necessaria e sufficiente, stabilita, come la precedente, dal Picard, riesce assai più espressiva sotto la forma datale da Enriques

$$p_a = -1,\ p_g = 1;\ P_4 = 1,$$

per l' importanza che acquistano anche quì, come per le curve, i caratteri invarianti, nel definire coi loro valori intere classi di superficie dotate di proprietà geometriche ed analitiche nettamente definite. In questo caso si ottengono infinite famiglie dipendenti da tre moduli g, h, g' e da un intero δ (1).

E' pure assai importante il fatto che sopra una superficie di rango 1 a moduli generali tutte le curve si ottengono per moltiplicazione da uno stesso sistema continuo invariante per le trasformazioni della superficie, il quale nel caso delle sup. di Jacobi è un sistema (Σ) di genere, grado, indice eguali a 2, formato da curve prive di punti multipli e caratteristico per tali superficie. Questo risultato assai elegante permette agli A. di assegnare per ogni valore di δ le superficie di Picard d' ordine minimo prive di curve eccezionali.

La parte diremo così preliminare e che prelude alle ricerche più profonde ed originali della Memoria si chiude con un riavvicinamento dei risultati geometrici a quelli relativi alla teoria delle funzioni abeliane. Tale riavvicinamento deriva dal considerare con Appell ed Humbert le curve algebriche di una sup. di Picard come luogo degli zeri di funzioni Θ (u, v) ai periodi (1) e di conveniente ordine: per il caso dei moduli particolari la rappresentazione trascendente si completa coll' intervento di un' altra categoria di funzioni legate alle relazioni singolari fra i periodi, cioè delle funzioni *intermediarie*.

La questione che involge maggiori difficoltà e da cui di-

(1) Altri esempi di caratterizzazioni analoghe furono dati: dal Castelnuovo per le sup. razionali ($p_a = P_1 = o$), dall'Enriques per le sup. con un gruppo continuo di trasf. birazionali ($p_a < o$): altri si trovano nella Memoria in esame.

Digitized by Google

pende in modo essenziale l' intera teoria è quella che riguarda l' esistenza e la costruzione delle involuzioni sopra una superficie di Jacobi. La ricerca degli A., assai interessante su questo punto, si rivolge dapprima a stabilire una classificazione completa di queste involuzioni sotto tre punti di vista differenti: ne segue che, se si escludono i casi degeneri che conducono a superficie razionali e rigate ellittiche, e quelli che dànno luogo a superficie di rango 1, tali involuzioni risultano regolari o irregolari secondochè il numero (finito) delle loro coincidenze è maggiore od eguale a zero: e che le superficie corrispondenti alle involuzioni irregolari appartengono alla categoria delle superficie ellittiche dotate d' un gruppo continuo ∞^1 di trasformazioni birazionali in sè stesse.

Queste premesse permettono agli A. di stabilire un *teorema fondamentale* da cui dipende la costruzione effettiva di ogni involuzione appartenente ad una superficie di Jacobi o più generalmente ad una superficie di rango 1, e dotata d' un numero finito di coincidenze, cioè relativa ad una superficie iperellittica di rango >1. In virtù di questo teorema ogni involuzione I_r del tipo suddetto è generata da un gruppo di r trasformazioni birazionali della superficie in sè, ogni gruppo della I_r ottenendosi da un suo punto operando su esso colle trasformazioni del gruppo. La proprietà relativa alle involuzioni I_2 generate da trasformazioni di 2.ª specie periodiche (e quindi generanti un gruppo ciclico) si trova adunque estesa al caso generale.

Questo teorema, dimostrato dai Sigg. Bagnera e de Franchis nell' ipotesi che l' involuzione non possieda curve fondamentali coniugate a punti uniti, presenta difficoltà nuove e profonde qualora lo si voglia ottenere nella sua forma più completa enunciata dagli A.; i quali hanno usato in modo abilissimo di alcune delicate e feconde considerazioni di continuità, che l' imagine Riemanniana della funzione algebrica ha poderosamente sussidiate mettendo in piena luce l' intima ragione della verità che ne scaturisce.

Da questo punto in poi la parte sostanziale della ricerca dipende da quella dei gruppi finiti di trasformazioni birazionali di una superficie di Picard in sè o altrimenti dallo studio dei gruppi finiti di sostituzioni lineari sulle variabili che mutano in sè una funzione abeliana del genere 2; intorno al quale si conoscono alcuni risultati fondamentali dovuti principalmente al Sig. Humbert.

In virtù di questi si sa che quando i periodi non sono legati da relazioni (singolari) a coefficienti interi, non esistono sulla superficie altre trasformazioni diverse da quelle ordinarie

Digitized by Google

di 1.ª e 2.ª specie, onde queste soltanto possono condurre a sup. iperellittiche dipendenti da tre moduli. Tali sono adunque le superficie (regolari) di rango 2 corrispondenti a trasformazioni di 1ª specie: e gli A. mostrano come queste superficie si riducano a tipi projettivamente determinati, e caratterizzati da una particolare configurazione di punti doppî e d' iperpiani tangenti singolari. Per $\delta=1$ si ha in questo caso la nota sup. di Kummer la cui proprietà caratteristica è quella di possedere 16 punti doppï.

Esaurito anche questo caso che presenta maggiore generalità, l' analisi degli A. si volge ai casi corrispondenti a trasformazioni singolari incominciando da quello delle sup. regolari. I Sigg. Bagnera e de Franchis hanno esaurito questo caso, (salvo la caratterizzazione coi plurigeneri), partendosi direttamente dalle trasformazioni e riducendo le loro equazioni a forma conveniente: gli A. invece hanno ritenuto più vantaggioso prendere le mosse dalla proprietà, già notata per queste superficie d' essere ellittiche, anzi d'essere le sole superficie ellittiche possedenti due fasci (l' uno ellittico, l' altro razionale) di curve ellittiche. Una elegante discussione aritmetica fondata sopra alcuni risultati di Enriques unita a brevi considerazioni sistematiche sulle trasformazioni delle sup. di Piccard relative a questo caso, conduce ad assegnare per ognuno dei tipi trovati il valore di δ, la forma delle sostituzioni sulle u, v (che danno la rappresentazione trascendente del gruppo appartenente alla sup. di Picard), e la tabella dei periodi normali (singolari) relativi.

Si riconosce in tal guisa che il rango r può assumere i valori 2, 3, 4, 6 e δ i valori 1, 2, 3, in modo che, colle superficie di Picard si hanno cinque tipi di superficie irregolari ben determinati, ognuno dei quali è caratterizzato dai valori di alcuni fra i generi. Per completare maggiormente lo studio di questo caso gli A. riassumono le condizioni caratteristiche in una sola più generale; la quale si enuncia dicendo che per una superficie algebrica l' essere iperellittica irregolare equivale ad avere il genere aritmetico $p_a = -1$, ed i plurigeneri P_i eguali a 0 o ad 1.

Per quanto riguarda le superficie regolari gli A. circoscrivono anzitutto la loro ricerca al caso in cui $\delta = 1$, (di cui quello $\delta > 1$ è una semplice estensione), e la superficie di Jacobi corrisponde ad una curva di genere 2 irriducibile cioè non spezzata in una coppia di curve ellittiche (1). L' analisi delle tra-

(1) Rimangono esclusi alcuni tipi di sup. regolari studiati dai Sigg. Bagnera e de Franchis.

Digitized by Google

sformazioni singolari porta a distinguerle in due categorie secondo il valore nullo o non nullo di un intero caratteristico (indice k della trasformazione secondo Humbert): quella delle *trasformazioni di* Hermite e quella delle *trasformazioni* (più propriamente *singolari) di* Humbert. Queste denominazioni valgono anche per i gruppi generati sulla sup. di Jacobi; e le superficie corrispondenti si differenziano anche nella rappresentazione parametrica per funzioni Θ irriducibili, che gli A. chiamano *propria* nel 1° caso, *impropria* nel 2.° La ricerca è condotta a termine soltanto per le superficie corrispondenti a gruppi di Hermite perchè una loro proprietà fondamentale conduce a stabilire per essi una classificazione completa. Tale proprietà, caratteristica, consiste nel trasformare in se stesse le funzioni Θ di 1° ordine cioè le curve del sistema Σ appartenente alla superficie di Jacobi: se ne trae che ogni gruppo di Hermite ha origine da un gruppo isomorfo di trasformazioni birazionali della curva di genere 2 di cui la sup. di Jacobi rappresenta le coppie.

Servendosi di una classificazione stabilita per questi gruppi dal Sig. Bolza, discussi i differenti gruppi Hermitiani a cui uno di essi può condurre, ed eliminati i casi degeneri, gli A. concludono coll' assegnare 11 tipi ben determinati di sup. iperellittiche regolari con tutti i generi eguali ad 1, per cui il rango può assumere i valori 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; ciascuno dei primi quattro tipi contiene infinite famiglie birazionalmente distinte, dipendenti, come si sa, da 3 moduli per $r = 2$, da uno solo invece per $r = 3, 4, 6$.

La parte che segue, contenuta nel T. 33 degli *Acta* è destinata allo studio particolareggiato di ciascuno dei tipi la cui esistenza è stabilita dalla ricerca generale, assegnando, per ciascuno di essi, un conveniente modello projettivo, caratterizzato, (come per le sup. regolari di rango 2) da una speciale configurazione di punti multipli e d' iperpiani tangenti singolari. La determinazione di questi ha per base quella dei punti, o delle curve di Σ che hanno sulla superficie di Jacobi comportamento singolare rispetto al gruppo. Una siffatta analisi non offrirebbe per sua natura gravi difficoltà, ma una complicazione assai noiosa e faticosa, se gli A. non l' avessero resa particolarmente elegante coll'introduzione di un appropriato simbolismo analogo a quello usato dall'Humbert per la sup. di Kummer. Alquanto più difficile è invece lo studio delle singolarità che si producono sulla superficie imagine del gruppo, e che per qualche caso sono di natura assai complicata e involgono considerazioni sottili e delicate sugl'intorni di quei punti della sup. di Jacobi che presentano singolarità per il gruppo. Così pure è nuovo ed originale il procedimento,

Digitized by Google

che ricorre altrove nella Memoria, atto a dimostrare l'ufficio caratteristico degli elementi singolari rispetto a ciascun tipo di superficie: la bontà di esso e dei precedenti sistemi di ricerca è provata dall' uso largamente sistematico fattone dagli A., che consente di usare il medesimo schema d' indagine in tutti i casi anche per i dettagli minori.

In definitiva, le superficie di rango r che così si ottengono sono Φ_{2r} di S_{r+1} a sezioni iperpiane (canoniche) di genere r+1: e fra esse si presenta specialmente degna di nota la Φ_6 di S_4 contenente 9 punti doppî biplanari formanti una configurazione che fu oggetto di eleganti ricerche del Segre e del Castelnuovo. Di questa superficie gli A. assegnano in forma assai semplice le equazioni algebriche, assieme alle equazioni iperellittiche delle curve singolari (coniche) e alle coordinate iperellittiche dei punti singolari.

I tipi projettivi così assegnati non sono fra i rappresentanti delle 11 categorie quelli che hanno minimo ordine, ma la loro importanza è assai rilevante sia per la simmetria della loro configurazione singolare sia per l' ufficio caratteristico di questa; ciascuno di essi si può, con proiezioni convenienti, ridurre ad un piano doppio di S_3 con sestica di diramazione che assume forma particolarmente semplice in un esempio offerto dagli A. in fine della Memoria.

La quale è certamente destinata a segnare un progresso notevole, sia relativo all' argomento di cui tratta, sia, più generalmente, nel campo della teoria delle superficie algebriche. L'aver condotto a tale condizione di completezza una indagine di natura sì complessa è risultato notevolissimo quando si tenga conto della ricchezza d' interpretazioni e della varietà di metodi a cui si può assoggettare ogni ricerca nel campo algebrico, e inoltre delle difficoltà sia inerenti all' argomento, sia all'uso dei differenti strumenti di ricerca; uso che riesce veramente efficace solo quando ne sia disposto in modo da rispettare il principio dell' economia di pensiero ed illustrare il lato estetico dell'argomento così caro a noi italiani — se pur legato alla tradizione geometrica di ogni tempo e di ogni scuola — per lo spirito di nostra razza e per il culto verso l' esempio dei grandi maestri. Senza discutere il contributo diretto dato all' argomento speciale di cui la Memoria tratta che è notevolissimo per l' importanza del teorema fondamentale e delle due classificazioni complete che gli A., hanno stabilito, farò notare invece il valore dei nuovi risultati di classificazione di cui si arricchisce la teoria generale, acquistando nuovi tipi di superficie completamente caratterizzati, sia mediante i valori dei generi, sia mediante gli

Digitized by Google

elementi singolari; valore che è conferito a risultati di tale natura dall' ufficio importantissimo che essi hanno per la brevità e la sicurezza di ricerca; alla quale è da augurarsi che debba giovare ulteriormente la bontà di alcuni procedimenti sistematici e, più in generale, lo spirito informatore dell' intera Memoria. Di cui dote perspicua è la varietà di metodi e di concetti tratti da molti altri rami delle scienze matematiche, per modo che mentre da un lato essa si connette a tanti e difficili ordini di ricerche nel campo della teoria delle funzioni e dei gruppi, dall' altro procede con indirizzo algebrico-geometrico senza trascurare, anzi coltivando in alcune parti il lato projettivo e iperspaziale. Questa varietà e l' equilibrio perfetto fra il lato trascendente e quello geometrico — senza che il primo soverchi il secondo, come spesso accade, svisando il carattere sostanziale dell' argomento, o mascherandolo attraverso un pesa nte formalismo, — costituiscono per il lettore un motivo di interesse, volta a volta rinnovato ed intensificato, e ben rispondono a quelle condizioni di generalità ed eleganza che sono vitali per la geometria la quale intristisce attraverso specializzazioni solitarie ed infeconde. Possedere ed usare di una ampia e geniale larghezza di vedute, impone, è vero, maggiori sacrifizî a coloro che di geometria vogliono dirsi veramente e seriamente cultori, e forse condurrà in avvenire a più gravi difficoltà conseguenti all' aumento continuo di produzione; ma non destituisce e non destituirà mai la geometria di quel carattere filosofico-estetico in cui tutti i grandi cultori di questa scienza hanno sempre riposto il suo fondamento, la sua grandezza, ed il suo valore altamente educativo.

ANNIBALE COMESSATTI.

Teoria dei Gruppi.

E. NETTO — *Gruppen-und Substitutionentheoric* (Sammlung Schubert LV). Goeschen 1908. 8.° p. VIII+175 (Prezzo Mk. 5.20).

Dell'A., ben noto specialista sulla teoria dei gruppi e delle sostituzioni, i nostri lettori conoscono indubbiamente un volume che, tradotto dal Battaglini, conseguì larga diffusione fra noi. L' opera che annunciamo differisce radicalmente da quella e perchè tratta assai largamente della teoria dei gruppi e perchè non tocca le applicazioni delle dottrine svolte allo studio delle equazioni algebriche. Tutto ciò è dimostrato dall' indice seguente dei capitoli costituenti lo scritto in discorso: 1. Con-

Digitized by Google

cetti fondamentali della teoria dei gruppi. 1. Il « quadrato » di Cayley. 3. Divisori di un gruppo; isomorfismo. 4. Trasformazione e permutabilità. 5. Gruppi composti. 6. Gruppi Abeliani. 7. Teoremi di Sylow e Frobenius. 8. Gruppi risolubili. 9. Gruppi di sostituzioni: transitività. 10. Gruppi di sostituzioni: primitività. 11. Gruppi di sostituzioni: gruppi di dato grado e di massimo ordine. 12. Rapprosentazione analitica delle sostituzioni; il gruppo lineare.

Le molteplici occasioni in cui l'investigatore ha bisogno di conoscere ed applicare le teorie svolte dal Prof. Netto assicurano al nuovo volume della « Sammlung Schubert » una larga schiera di lettori; possa il presente annuncio avere il potere di accrescerne il numero!

G. L.

Programmi e Riassunti di Corsi Universitari.

UNIVERSITÀ DI GINEVRA. — Conferenze tenute dal Prof. ALESSANDRO PADOA nel Gennaio 1911.

PROLUSIONE.

Termini logici e termini scientifici nel linguaggio ordinario (qualche termine esprime talvolta un concetto logico, cioè comune a tutte le scienze, e tal'altra un concetto scientifico, cioè spettante ad una scienza particolare; alcuni termini che sembrerebbero logici sono invece scientifici e viceversa).

Ideografia algebrica (il significato di ciascun simbolo non dipende dalla sua lettura, ma dall'uso che ne vien fatto).

Il sogno di Leibniz (una scrittura universale i cui segni dirigessero il pensiero, così da non poter commettere errori che non siano semplici sviste di calcolo) *e la sua realizzazione* (per opera principalmente di Leibniz, Segner, Lambert, De Morgan, Boole, Schröder, Mc Coll, Peirce e Peano che, primo, espose nel 1889 una teoria completa, rinunciando al linguaggio ordinario).

Confutazione di un sofisma (per cui la logica matematica è inutile o falsa secondochè conduce a risultati eguali o diversi da quelli della logica tradizionale) *e di un'obbiezione scettica* (per cui la logica, come dottrina, non guarisce nè gli idioti nè i pazzi, ed ai savi non abbisogna).

Il vocabolario logico ridotto ad una linea (9 simboli logici bastarono all'autore per abbandonare il linguaggio ordinario

Digitized by Google

negli enunciati e nelle dimostrazioni delle 97 proposizioni che compongono una sua teoria sui » Numeri interi relativi »).

La stenografia e le lingue artificiali (benchè concisa ed universale, l' ideografia logica differisce dalla stenografia, che abbrevia la rappresentazione grafica dei linguaggi naturali lasciandone immutate le diversità, e dalle lingue artificiali, che sono stromenti di espressione, ma non di analisi, del pensiero).

Logica matematica? (la logica matematica è la scienza di cui l' ideografia logica è il linguaggio; comprendendo essa tutta la logica tradizionale, di cui è un' estensione perfezionata, è ad essa ormai che deve attribuirsi, senz' altro, la denominazione di logica deduttiva).

Seconda Lezione — IDEOGRAFIA LOGICA.

Eguaglianze (« = », « *è eguale a* », fra due nomi di uno stesso oggetto arbitrario).

Appartenenze (« ε », « *è un* », fra un individuo ed una classe cui esso appartiene).

Estensione e comprensione dei concetti (ogni classe può considerarsi « estensivamente » o « comprensivamente », cioè quale insieme degli « individui » che la compongono o delle « proprietà » che la caratterizzano; « Cls » significa « *classe, considerata estensivamente* »).

Principio di permanenza (consiste nella immutabilità dell' insieme delle proprietà formali di ciascun simbolo ne' suoi vari uffici; non è una scoperta, ma un' esigenza).

Inclusioni (« ⊃ », « *ogni . . . è un . . .* », fra due Cls di cui la prima è contenuta nella seconda; necessità di distinguere « ε » da « ⊃ », non riconosciuta dallo Schröder).

Alcune classi aritmetiche (per esprimere in simboli le proposizioni aritmetiche, occorreva completare anche la comune ideografia aritmetica; si accenna ad alcune Cls aritmetiche per valersene negli esempi).

Nulla (« Λ », Cls cui non appartiene alcun individuo) *e tutto* (« V », Cls cui appartiene ogni individuo; usato in alcune proposizioni logiche, non appare in alcuna proposizione matematica).

Riunione e intersezione di classi (« ∪ », equivalente al latino « *vel* », ed « ∩ », fra due Cls, designano rispettivamente l' insieme degli individui che appartengono ad almeno una delle

Digitized by Google

Cls date o ad entrambe (1); Leibniz usava con tale significato i segni « + » e « × », donde a tali operazioni i nomi di « addizione logica » e « moltiplicazione logica », oggi ancor usati nelle chiose e che sarebbe preferibile abbandonare); *riunione disgiuntiva* (« ∘ », equivalente al latino « *aut* », fra due Cls, designa l' insieme degli individui che appartengono ad una soltanto di esse).

Individuo, elemento, aggregato (« Elm », « *elemento* », simbolo proposto dall' autore per rappresentare ogni Cls cui appartiene un solo individuo; necessità, rilevata dal Peano, di rappresentare diversamente un Elm e l' individuo che gli appartiene; « ι », « *eguale a* », da non confondere con « è eguale a », seguito da un individuo arbitrario, designa l' Elm corrispondente; « ; », « *il solo* », seguito da un Elm arbitrario, designa l' individuo corrispondente; « *aggregato* », Cls cui appartengono soltanto alcuni individui singolarmente nominati e che risulta dalla riunione degli elementi corrispondenti; si esprime quindi coi segni « ι » ed « 0 »).

Terza lezione — IDEOGRAFIA LOGICA (seguito).

Simboli costanti (quelli che, in ciascun loro ufficio, hanno sempre il medesimo significato) *o variabili* (rappresentati da « lettere italiche minuscole », ciascuna delle quali rappresenta un oggetto, che si suppone determinato, ma di cui si lascia libera la scelta).

Variabili reali o apparenti (secondochè dalla scelta della loro interpretazione dipende o non dipende il significato, ed in particolare la verità, della scrittura in cui si trovano tali variabili).

Proposizioni categoriche (prive di variabili reali) *o condizionali* (in cui entra almeno una variabile reale; se ve n'è una sola, ad es. x, si ha « una condizione rispetto ad x »).

Implicazioni (« ⊃ », « *se . . . allora . . .* »), fra due condizioni la prima delle quali, « ipotesi », implica la seconda, « tesi », cosichè la tesi è verificata da ogni interpretazione delle variabili reali che verifichi l' ipotesi).

Interpunzione (punti isolati « . » o raggruppati « : », « ∴ », ecc. spezzano una proposizione in parti, precisando l'ordine se-

(1) Per comodità tipografica si osano qui « 0 » ed « ε » invece dei segni speciali usati nel *Formulario* del Peano, che sono due piccole semicirconferenze a diametro orizzontale poste rispettivamente sotto o sopra il diametro (non segnato).

Digitized by Google

condo il quale si devono associare i simboli, costanti e variabili, di cui si compone).

Classi e condizioni (premettendo la scrittura « $x \in$ » ad una Cls, si ottiene una condizione rispetto ad x; premettendo la scrittura « $x \ni$ » ad una condizione rispetto ad x, si ottiene la Cls che risulta quale « insieme delle interpretazioni di x che verificano la condizione proposta »; quindi la scrittura « $x \ni$ » può leggersi « gli x tali che »; ogni condizione rispetto ad x può trasformarsi in un' appartenenza fra x ed un Cls determinata; il Peano ha unificato, in tal modo, le due teorie, delle Cls e delle condizioni).

Affermazioni simultanee o alterne (« $\cap$ » ed « $\cup$ », fra due condizioni, designano rispettivamente l'avverarsi « simultaneo » o « alterno » delle condizioni proposte, cioè di entrambe o di una almeno; in tal caso l'« $\cap$ » è abitualmente sottinteso; ma l'« $\cap$ », che nel linguaggio ordinario lega due soggetti aventi lo stesso predicato, viene rappresentato col segno « , »; nelle frrmole « $x, y \in a$ » l' « $\in$ » si legge « *sono* ».

Negazione d' una condizione. Classi contrarie (« $-$ », seguito da una proposizione categorica, vale « *non è vero che* »; seguito da una condizione rispetto ad x, designa la condizione contraria, cioè quella che è verificata dalle interpretazioni di x che non verificano la proposta; si preferisce trasportarlo davanti al simbolo principale della condizione e leggerlo « *non* »; seguito da una Cls, designa la Cls contraria, cioè l' insieme degli individui che non appartengono alla Cls proposta; posto fra due Cls, designa l' intersezione della prima con la contraria della seconda; anche davanti ad una Cls o fra due Cls lo si legge « *non* »; le riunioni di segni « $- =$ », « $- \iota$ » si possono leggere « *è distinto da* », « *distinto da* »).

Esistenza (« $\exists$ », seguito da una Cls, vale « *esistono dei...* » ovvero « *vi sono dei...* »; quindi « $- \exists$ », seguito da una Cls, vale « *non esiste alcun...* » ovvero « *non vi è alcun...* »; l' introduzione di questo simbolo ha resi inutili, nelle applicazioni, i segni « $\wedge$ » e « $\vee$ »).

Confronto tra l' ideografia logica ed il linguaggio ordinario (il quale chiarisce l' ambiguità di questo e la precisione di quella).

Quarta lezione — LOGICA DEDUTTIVA.

Riflessibilità, simmetria e transitività di alcune relazioni (una

Digitized by Google

relazione è « riflessiva » se, per ogni valore « possibile » di x, sussiste fra x e x; è « simmetrica » se, quando sussiste fra x ed y, deve sussistere fra y ed x; è « transitiva » se, quando sussiste fra x ed y, nonchè fra y e z, deve sussistere fra x e z; il simbolo « $=$ » ha queste tre proprietà, il simbolo « $\supset$ » ha soltanto la prima e la terza, in ambo gli uffici; il simbolo « ε » non ha alcuna di queste proprietà).

Proprietà sostitutiva dell'eguaglianza (le 3 proprietà enunciate sono comuni all'eguaglianza e ad altre relazioni; la proprietà che caratterizza l'eguaglianza è questa: se $x = y$, sostituendo y ad x in una scrittura qualunque in cui entri x, il significato, ed in particolare la verità, di tale scrittura non si altera).

Proprietà semplificativa commutativa, associativa e distributiva di alcune operazioni (ciascuna delle operazioni « 0 » ed « e » è « semplificativa », « commutativa », « associativa » e ciascuna di esse è « distributiva » rispetto all'altra; cioè, se a, b, c sono tutte Cls o tutte condizioni rispetto ad una medesima variabile, « $a\,0\,b = a$ », « $a\,0\,b = b\,0\,a$ », « $(a\,0\,b)\,0\,c = a\,0\,(b\,0\,c)$ », « $a\,0\,(b\,e\,c) = (a\,0\,b)\,e\,(a\,0\,c)$ » ed analogamente scambiando fra loro i segni « 0 » ed « e »).

Sillogismo, sorite ed altre forme di ragionamento (l'analisi dei 19 modi di « sillogismo » ammessi dalla logica scolastica conduce a riconoscere che quello in « Barbara » enuncia la transitività di « $\supset$ », quelli in « Darapti » e « Bramantip » sono errati perchè concludono con un'affermazione di esistenza non giustificata dalle premesse, e gli altri 14 sono completamente superflui; si noti che la « minore » di un sillogismo in « Barbara », anzichè un inclusione, può essere un appartenenza, così: « $x \varepsilon a \,.\, a \supset b : \supset : x \varepsilon b$ »; il « sorite » è l'applicazione della transitività di « $\supset$ » a quante si vogliano Cls, ad es. così: « $a \supset b \,.\, b \supset c \,.\, c \supset d : \supset : a \supset d$ »; si enunciano e si commentano altre « forme di ragionamento », cioè altre proposizioni logiche).

Quinta lezione — LOGICA DEDUTTIVA (seguito).

Legge di dualità (essendo data una proposizione *vera*, nella quale si trovino soltanto alcuni o tutti i segni « $= - \vee \wedge e\ 0 \supset$ », essa rimane necessariamente *vera* conservando invariati i segni « $= -$ », scambiando fra loro i segni « $\wedge \vee$ » e, quando i segni « $e\ 0 \supset$ » non stiano fra espressioni che rappresentano necessariamente condizioni, scambiando fra loro i segni « $e\ 0$ » e scambiando fra loro quanto precede e segue ciascun segno « $\supset$ »;

Digitized by Google

questa legge, di cui viene data una dimostrazione generale, costituisce uno stromento di dimostrazione e di ricerca ignoto alla logica scolastica).

Principio d' identità, di contraddizione e del terzo escluso « $a = a$ », « $a \, \mathbf{e} \, (-a) = \bigwedge$ », » $a \, \mathbf{o} \, (-a) = \bigvee$ »; il terzo principio è duale del secondo; impossibilità di ridurre la logica deduttiva ad un solo principio).

Altre proposizioni notevoli (oltre alle formule fondamentali di De Morgan « $-(a \, \mathbf{o} \, b) = (-a) \, \mathbf{e} \, (-b)$ », « $(-a \, \mathbf{e} \, b) = (-a) \, \mathbf{o} \, (-b)$ », fra loro duali, ed a molte altre proposizioni dovute a vari autori, si enuncia la proposizione di Peirce « $a \, \mathbf{e} \, b \supset c \, \mathbf{o} \, d \, . =. \, a \, \mathbf{e} \, -d \supset c \, \mathbf{o} \, -b$ », che è autoduale, e la si dimostra vera senza curarsi di comprenderne il significato).

Possibilità di ridurre il vocabolario logico a tre simboli (l'autore presenta una catena di eguaglianze la quale insegna ad esprimere ciascuno dei simboli « $\iota \supset \imath \varepsilon$, Cls $\dot{\Lambda}$ - $\forall$ $\exists$ **0** ∘ Elm » mediante i simboli « $= \ni \mathbf{e}$ »).

Sesta lezione — METODOLOGIA PURA.

Definizioni esplicite. Idee primitive (« definire un simbolo iu un trattato » significa esprimerlo invertibilmente mediante simboli già considerati nel trattato stesso; inconsistenza teorica e significato pratico della distinzione tra definizioni « nominali » e « reali »; definizioni matematiche che non procedono dal « genere prossimo » alla « differenza specifica »; il « vero metodo » di Blaise Pascal è assurdo; ogni scienza ha necessariamente alcune « idee primitive », cioè non definite, oltre a quelle rappresentate dai simboli logici; ma vi è qualche arbitrarietà nella scelta di tali idee primitive).

Dimostrazioni. Assiomi e postulati (« dimostrare una proposizione in un trattato » significa farla risultare « conseguenza necessaria » di proposizioni già enunciate nel trattato stesso; ogni scienza ha necessariamente alcuni « postulati », cioè proposizioni non dimostrate, oltre alle « definizioni » ed agli « assiomi », cioè alle proposizioni logiche; ma vi è qualche arbitrarietà nella scelta di tali postulati; essi però devono essere « compatibili » od almeno « ordinatamente indipendenti »).

Perfezione di una teoria deduttiva (il sistema di postulati sia « irriducibile », cioè nessuno di essi sia dimostrabile mediante gli altri, indipendentemente dal loro ordine; il sistema di idee primitive sia « irriducibile » rlspetto al sistema di postu-

Digitized by Google

lati, cioè da questi non si possa dedurre alcuna definizione di una di tali idee mediante le altre; come si riesca a verificare il sussistere dell' una e dell' altra irriducibilità).

Essenza e valore del metodo deduttivo. Pseudo-variabili e proposizioni ipotetiche (sofismi contro la fecondità del metodo deduttivo, loro spiegazione e confutazione; inconsistenza delle distinzioni comuni tra metodo deduttivo e induttivo; esempi di deduzioni in cui si procede dal particolare al generale. dall'effetto alla causa; il « dedurre » è l' atto di separare la tesi di un'implicazione dalla sua ipotesi, ogniqualvolta questa risulti verificata; in tale operazione le costanti non logiche figurano momentaneamente quali « pseudo-variabili », in quanto si prescinde da ogni loro proprietà estranea al semplice verificare l' ipotesi, e questa va considerata quale « proposizione ipotetica », alla cui verità rimane subordinata quella della tesi, cioè della « proposizione dedotta »).

Settima lezione — METODOLOGIA APPLICATA.

Un sistema d' idee primitive e di postulati per l' aritmetica (il « Formulario » inizia lo studio dell' Aritmetica con un sistema di 6 postulati in cui entrano 3 idee primitive, cioè « zero », « numero intero assoluto, zero incluso » e « il successivo di »; tale sistema è irriducibile sotto l'aspetto della indipendenza assoluta; ma l' autore ne ha dedotto una definizione esplicita dello « zero » mediante le altre due idee primitive; ciò gli ha permesso di passare ad un sistema equivalente di 4 postulati in cui entrano 2 idee primitive, le precedenti tranne lo « zero »; il Pieri ha introdotto qualche utile variante nella scelta dei postulati, sotto l' aspetto della loro evidenza immediata, conservandone immutato il numero e le idee primitive).

Definizioni per induzione (come si definiscono induttivamente l' addizione, la moltiplicazione e l' elevazione a potenza; in che differiscono tali definizioni dalle definizioni esplicite).

Definizione per astrazione (in che consista, quali applicazioni ne vengono fatte e quale sia il loro difetto logico).

Teoria dell'astrazione matematica (l' autore sviluppa la teoria da lui presentata nel 1897 al congresso filosofico di Parma, in cui vien data una « definizione esplicita » della « astrazione di ciascun individuo di una classe rispetto ad una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva per tutti gli individui di codesta classe », dalla quale definizione, senza ricorrere al « principio di astrazione » del Russell, viene dedotta la consueta « definizione per astrazione »).

Digitized by Google

Un nuovo sistemi di postulati (l' autore presenta, per l'Aritmetica, un nuovo sistema di 2 postulati in cui entra una sola idea primitiva, quella comunemente espressa dalla parola « *coppia* »; il « Formulario » avendo assegnato tale idea alla Logica, il Russel potè affermare infranta ogni barriera fra la Logica e l'Aritmetica; perchè l' autore reputi opportuno assegnare alla Aritmetica l' idea di « coppia »).

Dal concetto di coppia a quello di numero naturale e di transfinito (inspirandosi ai lavori di G. Cantor e del Russell, l'autore mostra come dal concetto di « coppia » si possa procedere, mediante definizioni esplicite, al concetto di « appaiabilità di due classi », alla distinzione fra « classi finite » e « classi infinite », ed al concetto di « numero naturale » e di « numero transfinito », quale « astrazione di una classe rispetto all'appaiabilità », secondochè la classe considerata è « finita » od « infinita »; si definiscono poi esplicitamente lo « zero », « il successivo di », l' « addizione «, la « moltiplicazione » e la « elevazione a potenza », rinunciando così alle definizioni induttive; si dimostra la « esistenza » di una classe corrispondente a ciascun numero naturale e la « esistenza » di classi infinite, donde il valore pratico delle teorie dei numeri naturali e dei numeri transfiniti).

Dimostrazione del principio d' induzione completa (inspirandosi allo studio accennato del Pieri, ma ricorrendo unicamente ai 2 postulati da lui prescelti, l' autore dimostra per assurdo il principio d' induzione completa, dando così una confutazione di fatto alle note asserzioni del Poincaré).

Notizie.

Enciclopedia delle Matematiche elementari. — È questa l' opera di cui da tempo (v. *Bollettino* T. XI, p. 91) annunciamo il progetto. La Società « Mathesis », sotto i cui auspici verrà effettuata, nè affidò la direzione ad uua Commissione composta dei Professori L. Berzolari, G. Vivanti, F. Gerbaldi, R. Bonola e E. Veneroni. la quale ha già redatto un piano generale dell' opera e ne ha affidata l' esecuzione a persone di nota competenza. Quale sia il disegno dell'opera e quali siano gli scienziati chiamati a tradurlo in atto emerge dal seguente prospetto:

Vol. I. *Analisi.* 4. Logica matematica (A. Padoa). 2. Aritmetica elementare (E. Bortolotti). 3. Teoria dei numeri, analisi

Digitized by Google

indeterminata (M. Cipolla). 4. Concetto di numero e sue estensioni (F. Enriques e D. Gigli). 5. Limiti, serie, frazioni continue, prodotti infiniti (G. Vitali). 6. Progressioni e logaritmi (L. Tenca e A. Finzi). 7. Calcolo letterale, identità algebriche (D. Gigli). 8. Analisi combinatoria, determinanti, equazioni lineari (L. Berzolari). 9. Equazioni di grado superiore al primo (O. Nicoletti). 10. Problemi algebrici e loro discussione (B. Calò). 11. Elementi di calcolo infinitesimale (G. Vivanti). 12. Rapporti fra l'analisi e l'algebra elementare (S. Pincherle e G. Vivanti).

Vol. II *Geometria.* 1. Proprietà elementari delle figure del piano e dello spazio. (F. Amodeo). 2. Teoria della misura ed applicazioni (A. Perna). 3. Geometria del triangolo e del tetraedro (V. Retali). 4. Poligoni e poliedri regolari e stellati (L. Brusotti). 5. Trasformazioni geometriche elementari (E. Veneroni). 7. Geometria sulla sfera (R. Bonola). 8. Sezioni del cilindro e del cono circolari (E. Ciani). 9. Massimi e minimi in geometria (A. Padoa). 10. Metodi per la risoluzione dei problemi geometrici; problemi classici (F. Gerbaldi). 11. Fondamenti della geometria elementare (U. Amaldi). 12. Funzioni circolari, funzioni iperboliche, trigonometria piana e sferica (G. Pesci). 13. Calcolo vettoriale (R. Marcolongo e C. Burali-Forti). 14. Elementi di geometria analitica (L. Berzolari). 15. Elementi di geometria proiettiva (M. Pieri). 16. Elementi di geometria descrittiva (F. Severi). 17. Curve e superficie speciali (G. Loria). 18. Geometria non euclidea (R. Bonola). 19. Geometria non-archimedea (G. Veronese). 20. Rappresentazioni geometriche dei numeri complessi (R. Bonola). 21. Rapporti fra le teorie geometriche superiori e la geometria elementare (U. Amaldi, R. Bonola, F. Enriques).

Vol. III *Matematica applicata. Storia Didattica.* 1. Unità di misura (G. Celoria). 2. Approssimazioni numeriche; calcolo grafico (G. Lazzeri e G. Pesci). 3. Calcolo delle probabilità; teoria degli errori (F. Guarducci). 4. Applicazioni elementari della matematica alle scienze fisiche (E. Daniele e A. Viterbi). 5. Statistica matematica; attuaria (C. Gini e R. Viti). 6. Matematica finanziaria (T. Boggio). 7. Storia della matematica elementare (G. Vacca). 8. Indirizzi didattici e libri di testo (G. Scorza). 9. Ricreazioni matematiche (M. Cipolla). 10. Strumenti (F. Guarducci). 11. Modelli (F. Guarducci).

***

Opere di L. Eulero. — Senza dubbio i nostri lettori ap-

Digitized by Google

prenderanno con viva soddisfazione che questa colossale impresa, a cui si temeva non bastassero i mezzi, è ormai in via di attuazione, grazie alla Società dei naturalisti svizzeri, che ne ha assunto la direzione. Il comitato di redazione. composto dei Professori F. Rudio, A. Krazer e P. Stäckel, ha compilato e pubblicato un particolareggiato progetto per l' edizione di cui è parola, il quale non solo mostra la perfetta preparazione alla impresa posseduta dai direttori di essa, ma, siam certi, servirà di modello a tutti coloro che in avvenire si accingeranno a consimili imprese. La distribuzione degli scritti in volumi e l'assegnazione della relativa revisione venne già compiuta e crediamo far cosa grata ai nostri lettori indicandone qui le linee generali:

I Serie.

Aritmetica ed algebra (5 volumi).

I. Anleitung zur Algebra. T, 1. (H. Weber).

II. Memorie aritmetiche. T. 2 (F. Rudio); T. 3 (F. Rudio); T. 4 (A. Markoff).

III. Memorie d'algebra. T. 5 (H. Weber e B. du Pasquier).

b) Analisi (11 volumi).

I. Trattati di analisi. T. 6 (W. Dyck); T. 7 (G. Kowalewski); T. 8 e 9 (F. Engel e L. Schlesinger).

II. Serie, prodotti, frazioni continue: T. 10 (K. Böhm e G. Faber): T. 11 (A. Markoff).

III. Integrali T. 12 (A. Gutzmer); T. 13 (A. Liapounoff); T. 14 (A. Krazer).

IV. Equazioni differenziali. T 15 (E. Vessiot).

V. Calcolo delle variazioni· T. 16 (J. Hadamard).

c) Geometria (2 volumi).

T. 17 e 18 (H. Linsembarth e R. v. Lilienthal).

II Serie.

a) Meccanica (11 volumi).

I e II. Trattati (P. Stäckel). III. Principi della meccanica e meccanica dei punti materiali (A. Voss). IV. Meccanica dei solidi (T. Levi-Civita). V e VI. Teoria dell'urto, meccanica dei corpi pieghevoli ed elastici (P. Stäckel e H. Burckhadt). VII. Meccanica dei corpi solidi ed areiformi (H. Lamb). VIII e IX. Artiglieria ed ingegneria (F. R. Scherrer e K. Heuen). X. Macchine (K. Heuen). XI. Scienza navale (H. E. Timerding).

Digitized by Google

b) Astronomia (5 volumi) (O. Bäcklund, J. Bauschinger, C. V. L. Charlier, F. Cohn).

XII. Opere separate. XIII e XIV. Memorie sopra il problema dei tre corpi. XV. Trajettorie speciali, precessione e mutazione. XVI. Astronomia sferica,; parallassi; fisica cosmica.

III Serie.

a) Fisica (5 volumi).

I. Fisica generale, Calore, Acustica e Musica (R. Gans, E. e R. Bernoulli). II. Magnetismo, Elettricità, Ottica (R. Gans e E. Cherbuliez). III e IV. Istrumenti ottici (E. Cherbuliez).

b) Opere varie (2 volumi).

VI (A. Lalive e F. Rudio). VII. (K. Matter e E. Hoppe).

c) Carteggio (3 volumi).

VIII, IX e X (G. Enestrom).

***

L' EDIZIONE NAZIONALE DELLE OPERE DI GALILEO GALILEI è compiuta ed il *Bollettino* unisce la propria lode al coro che si eleva da ogni parte del mondo a coloro che seppero portare a compimento questo insigne monumento elevato dalla patria riconoscente all' instauratore del metodo sperimentale e prima di ogni altro ad Antonio Favaro che vi spese attorno trent' anni di ininterotte fatiche. Quali siano state le edizioni precedenti e quali le ragioni per cui si manifestò urgente il bisogno di una nuova espose lo stesso Favaro in un bellissimo discorso letto alla R. Accademia della Crusca il 30 Gennaio 1910, discorso che porta appunto il titolo *Galileo e le edizioni delle sue opere.* Ivi l' oratore, fra l' altro fece cenno, dell' appunto o meglio lamento di clandestinità fatta all' edizione nazionale; lamento che si ripete e si ripeterà sempre più intensamente col progredire e diffondersi degli studi intorno alla storia delle scienze. Possa esso vincere le resistenze finora incontrate alla riproduzione venale di quell' edizione; la grande collezione dei classici italiani progettata da Benedetto Croce, nella quale avrà il posto che merita il grande fiorentino, fornirà forse l' occasione ed i mezzi per soddisfare il desiderio generale degli studiosi!

***

Digitized by Google

I DETERMINANTI FURONO SCOPERTI IN GIAPPONE PRIMA DI LEIBERIZ: ecco la tesi che si è proposto di stabilire il ben noto matematico T. Hayashi nella memoria *The « Fukundai » and determinants in Japanese mathematics,* pubblicata negli Atti della Società matematica di Tôkyô (II Ser., Vol. V, N. 5); la scoperta sarebbe stata fatta da Seki (cfr. questo *Bollettino,* T. IX, 1906, p. 65-72), che notoriamente visse nel periodo 1642-1708, onde sarebbe circa contemporanea a quella fatta da Leibnriz (1646-1716), che è attestata da un celebre frammento di data incerta. Due cose vanno notate, e cioè: I. Tale ritrovato è comprovato da alcune opere manoscritte la cui decifrazione è in generale difficile e talora impossibile perchè come è noto la matematica giapponese odierna non è il tradizionale proseguimento dell'antica. II. Secondo l'interpretazione dell'Hayashi, i suoi compatrioti avrebbero usato, per svolgere un determinante di ordine qualunque, una procedura pratica di cui è caso particolare quella notissima insegnata dal Sarrus pei determinanti di terz'ordine.

* * *

LA CORRISPONDENZA FRA G. GRANDI E T. CEVA venne di recente pubblicata nei Vol. XXVIII e XXIX degli *Annali delle Unieersità toscane* fra i Documenti illustranti ricerche sopra *La scuola di Galileo nella storia della filosofia* a cui attende il Prof. A. Paoli dell'Ateneo Pisano. Quella corrispondenza porge un interessante contributo alla storia della meccanica in Italia, nonchè a quella del metodo degli indivisibili, onde va segnalata a tutti coloro che si occupano di tali soggetti.

* * *

MONUMENTO AD E. BELTRAMI. Addì 6 Novembre 1909 venne solennemente inaugurato nella R. Università di Pavia un busto, opera di Giorgio Kienerk, di Eugenio Beltrami. Il discorso inaugurale venne tenuto da C. Somigliana, il quale seppe con rapida sintesi porgere un'idea esatta dell'opera scientifica di colui che fu uno dei più grandi matematici del Secolo XIX.

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

Bachmann, Niedere Zahlentheorie. I. Teil 402 pag. (1902) leg. lire 18.50. — II. Teil (Schluss): Additive Zahlentheorie, 480 pag. con fig. (1910) leg. L. 22.25.

Barnard a. Child, A new Algebra. Part. I-IV. L. 5.75.

Basset A Treatise on the Geometry of Surfaces. Lire 14.

Bettazzi, Lezioni di calcolo integrale (1910) L. 5.

Bianchi, Vorlesungen über Differential-geometrie. II Ediz. 721 pag. (1910) L. 29.

Brioschi, Opere matematiche. Vol. V (ultimo) 1910, Lire 30. vol. I a IV cad. Lire 25.

Cristoffel, Gesammelte Mathem, Abhandl, Hrsg. von L. Maurer. Bd. I-II. L. 45.

Fano, Lezioni di Geometria descrittiva, date nel R, Politecnico (1910) L. 16.

Grassmann, Projektive Geometrie der Ebene. Unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. 2 Bde. I. Bd. Binäres. Lire 16.

Hadamard, Leçons sur le calçul des variations. Tome I (1910) L. 18.50.

Helm. Grundlehren der höheren Mathematik (1910) L. 17.25.

Höfler, Didaktik des mathematischen Unterrichts. Sammlungen didakt. Handbücher f. d. realist. Unterricht an höheren Schulen Bd I (1910) Lire 16.

Kelvin, Mathematical and Physical Papers Xol. IV: Hydrodinamics and general Dynamics. Lire 24.

Killing u. Hoverstadt, Handbueh d. mathemat. Unterrichts. I. Bd. Con 32 fig. nel testo; 456 pag. (1910). Lire 13.

Klein, Conferenze sopra alcune questioni di geometria elem., red. da F. Tägert e trad. dal Prof. F. Giudice, con pref. del Prof. G. Loria (1896) L. 3.

Klein, Elementarmathematik v. höheren Standpunkte aus.

1. Teil: Arithmetik, Algebra. Analysis. 590 pag. autog. con fig. L. 10.
2. Teil: Geometrie 615 pag. autografe con fig. (1909) L. 10.

Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. 2 volumi (1909) L. 44.

Lilienthal, Vorlesungen üb. Differentialgeometrie I, Bd: Kurventeorie. Con 26 fig. nel testo di 370 pag. (1901) Lire 16.

Loria Gino, Le trasfigurazioni di una scienza. Donne matematiche (1902) 8° L. 2.

Loria Gino, Metodi di geometria descritriva. 16° (1909) L. 3.

Loria Gino, Il passato ed il presente nelle principali teorie geometriche. III ediz. (1907) L. 8.

Loria Gino, I poligoni di Poncelet. Discorso 8° pag. 50 (1889) L. 3.

Loria Gino, Spezielle algebrische u transzendente ebene Kurven. Theorie u. Geschichte. Deutsch v. Schütte. II Anflage. I Bd: Die algebraischen Kurven. Con 141 fig. su 14 tavole litografate. 490 pag. (1910) L. 21.50.

Digitized by Google

Loria Gino, Vorlesungen üb. darstellende Geometrie. Deutsch von Fr. Schütte I: Die Darstellungsmethoden. Con 163 fig. nel testo di 220 pag. (1908) L. 9.

Mikami, Mathematical Papers from the Far East. Pag. 229 (1910) L. 13.

Minkowski, Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik 82 pag. (1910) L. 3.50.

Netto, Die Determinanten. Pag. 128 (1910) L. 4.50.

Pascal, Repertorium der höheren Mathematik. II: Geometrie. 1. Hälfte Grundlagen und ebene Geometrie. 535 Pag. (1910) Leg. L. 13.

Perry, Höhere Analysis für Ingenieure. II. verbesserte und erweiterte Auflage. 464 pag. (1910) Leg. L. 17.

Poincaré, Sechs Vorträge aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik, 60 pag. (1910) leg. L. 3,50.

Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume. 2. Verb. u. Verm. Auflage. 482 pag. L. 17.

Schröder, Abriss der Algebra der Logik, II. Teil: Aussagentheorie, Funktionen, Gleichungen und Ungleichungen. 159 pag. (1010) L. 5.50.

Riquier, Les systèmes d'équations aux dérivées partielles (1909) L. 20.50.

Segre C., Le corrispondenze univoche nelle curve ellittiche: nota. (1880) L. 4.

Segre C., Le coppie di elementi immaginarii nella geometria proiettiva sintetica (1886) L. 4.

Segre C., Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito (1895) L. 4.

Segre C., Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario, ecc. (1885) L. 4.

Simon, Geschichte d. Mathematik in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte (1908) L. 17.

Staude, Analytische Geometrie d. Punktepaares, des Kegelschnittes u. d. Fläche zweiter Ordnung. I. Teil, 528 pag. con 181 fig. (1910) leg. L. 28.50.

Sturm. Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften. 4 Bände

I. Bd: Die Verwandschaften swischen Gebilden 1. Stufe. 415 pag. (1908) leg. L. 21.

II. Bd: Die eindeutigen linearen Verwandschaften zwischen Gebilden 2 Stufe. 345 pag. (1908) leg. L. 21.

III. Bd: Die eindeutigen linearen Verwandschaften zwischen Gebilden III. Stufe. 584 pag. (1909) leg. L. 26.

IV. Bd: Die nicht linearen u. d. mehrdeut. Verwandschaften II. u. III. Stufe. 486 pag. (1909) leg. L. 26.

Sylvester, The collected mathematical Papers. 3 vol.i L. 72.

Vol. I 1837-1853, Vol. II 1854-1763, Vol. III 1870-1883.

Thiele, Interpolationsrechnung (1910) L. 13.

Voigt, Lehrbuch d. Kristallphysik, L. 40.

Waals, Lehrbuch der Thermodynamik. I. Teil (1010) L. 16.

Widder, Untersuchungen über die Allgemeinste Lineare Substitution mit vorgegebener pter Potenz. 52 Pag. (1910) L. 4.25,

Genova — Tipografia FRATELLI CARLINI fu G. B.

Digitized by Google

(Conto corrente colla Posta)

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

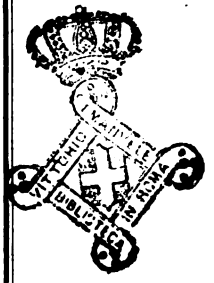
DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA



ANNO XIII — FASC. II.

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1911

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche.

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8.°.

Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino, Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Sommario del presente Fascicolo.

L. NEUMANN, Jacob Lüroth p. 49-52.

Elenco delle pubblicazioni di J. Lüroth p. 53-57.

Storia (Simon, Decourdemanche) p. 57-61.

Opere complete ed Enciclopedie (Brioschi, Fuchs) p. 61-62.

Filosofia (Poincarè) p. 62-63.

Meccanica (Caldarera) p. 63-64.

Ingegneria (Pizzamiglio) p. 64-65.

Meccanica Sociale (Haret) p. 66-67.

Analisi infinitesimale (Kowalewski, Dantscher, Thomae, Serret, Schlesinger, Nielsen, Montel, Fuët) p. 70-76.

Funzioni ellittiche (Boehm) p. 76-77.

Notizie. Tema proposto dalla Società di Haarlem. Il I centenario di una grande Casa Editrice. Un consiglio. Il V Congresso dei Matematici. Tema proposto dall'Accademia di Danimarca. Concorso. Tema proposto dall'Accademia di Madrid. Concorso della R. Accademia del Belgio.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XIII — Aprile, Maggio e Giugno — 1911

R. ACCADEMIA DEI LINCEI IN ROMA BIBLIOTECA

JACOB LÜROTH

(+ a Friburgo i. B. il 14 Settembre 1910)

Parole pronunciate sulla sua tomba da LUDWIG NEUMANN.

Sono oggi trascorse dodici settimane dal giorno in cui noi ci riunimmo in questo solenne recinto per porgere l' ultimo saluto al nostro collega Wetz, così presto rapitoci, e la morte implacabile ci impone un nuovo sagrificio.

L' uomo superiore, l' eminente scienziato, al cui feretro noi in questo momento ci troviamo riuniti dolenti, fu un matematico. Il profano ama rappresentarsi il cultore della scienza a cui fu consacrata la vita di Lüroth come un uomo fuori del mondo, che va stillandosi il cervello, che procede solitario per la tranquilla sua strada, sfiorando appena di quando in quando le strade battute da altri. Orbene il nostro compianto collega non corrispondeva certamente a questo tipo. A nulla rimaneva indifferente il suo chiaro intelletto, nulla era estraneo al suo interesse di quanto incatena lo spirito umano, di quanto riscalda il cuore dell'uomo. Appunto in ciò risiedeva il suo significato, chè la sua azione si manifestava, non soltanto nelle aule e nei seminari, ma in tutte le questioni concernenti l' insieme della nostra corporazione accademica. L' « universitas literarum » otteneva la sua partecipazione in ogni direzione; ciò spiega come e perchè in ogni occasione egli siasi manifestato come un sostenitore e difensore della facoltà filosofica come un tutto. Allorquando qualche mese fà ne fu deciso lo sdoppiamento in una facoltà filologica-storica ed in una fisico-matematica, tale mutamento di organizzazione non riscosse la sua approvazione, ma Lüroth era così calmo nel pensare e così lucido nel giudicare che non esitò di partecipare attivamente, in qualità di pro-decano, ai lavori necessari all' instaurazione del nuovo stato di cose e per unanime consenso venne scelto come primo decano

Digitized by Google

della nuova nostra « quinta » facoltà, di cui statuti ed organizzazione sono in gran parte opera sua. Quanto volontieri e piacevolmente noi avremmo intrapresi nel prossimo semestre invernale i nostri comuni lavori sotto la sua guida sicura, competente, bonaria! Ma ciò non doveva accadere. La crudele mano della morte lo ha afferrato rapidamente ed inaspettatamente; sicchè, invece di contemplare un futuro fecondo, dobbiamo volgere il nostro pensiero verso il passato. Ma in questa ora di lutto noi non dobbiamo pensare a ciò che Lüroth ci avrebbe potuto dare per lungo tempo se i nostri vivissimi cordiali desideri fossero stati soddisfatti! quello che debbo fare io, che ne presi il posto come decano, è di esporre ciò che egli era per noi.

Jakob Lüroth era nato a Mannheim il 18 Febbraio 1844, figlio di un benestante di egual nome. Dopo avere compiuto in un tempo insolitamente breve i suoi studi secondari, egli frequentò le Università di Bonn, Heidelberg, Berlino e Giessen, ottenne il grado di dottore nel 1865 a Heidelberg, ove poi (1867) conseguì anche la libera docenza; in conseguenza fu chiamato l'anno seguente al Politecnico — oggi Technische Hochschule — di Karlsruhe in qualità di assistente. Nel 1869, cioè appena venticinquenne, conseguì in questo istituto il grado di professore ordinario di analisi superiore, nel 1880 si trasferì alla Technische Hochschule di Monaco (Baviera) e nel 1883 fu chiamato alla nostra Università (Freiburg i. B.) Fra noi egli dunque ha operato per 27 anni, con ottimi risultati, stimato egualmente da colleghi e da discepoli.

Riguardo alla sua produzione scientifica desta sopratutto una legittima meraviglia la straordinaria versatilità del suo ingegno. I più disparati campi della matematica pura ed applicata lo hanno attratto ad un tempo vivamente, spingendolo a geniali ricerche, i cui risultati trovansi consegnati in parecchie opere poderose ed in un grande numero di memorie. Tali lavori abbracciano l'aritmetica, l'algebra, l' « Ausdehnungslehre », l'algebra della logica, la teoria delle funzioni, la geometria projettiva ed analitica delle curve e delle superficie algebriche, la geometria sintetica ed infinitesimale, la meccanica, la fisica matematica e la geodesia, come pure la storia della matematica. Non è questo il luogo per entrare in particolari sopra il significato dei suoi lavori, che riuscirebbero quasi inintellegibili ai non matematici. Ciò che va rilevato e che parecchie delle proposizioni e delle dimostrazioni di Lüroth entrarono in tutti i trattati e che egli, tanto con la edizione del secondo volume delle *Opere* di Grassmann, quanto con le traduzioni tedesche (fatte col concorso di suo cognato Schepp) della *Teoria dell' at-*

Digitized by Google

trito di Jellet e della *Teorica delle funzioni di variabili reali* del Dini ha prestato alla scienza indimenticabili servigi.

Quanto apprezzato sia stato il Lüroth nei circoli competenti risulta da ciò che da molti anni era membro della R. Accademia bavarese (Monaco) e che, non appena fondata l'Accademia di Heidelberg, egli vi fu accolto come socio. Inoltre da molti anni era membro dell'ufficio di presidenza dell'Accademia Leopoldina.

Parallelamente alla considerevole produzione originale del nostro caro estinto procedeva una instancabile e fruttifera opera didattica. Essa si estendeva a tutti i principali campi dell'alta matematica; ma va notato da chi voglia tracciare la figura pedagogica del Lüroth, che egli non misconosceva l'importanza della matematica elementare (per cui molti affettano un ingiusto disprezzo) e ripeteva sempre quanto importante fosse l'occuparsene seriamente per un futuro insegnante. Per ciò tenne di quando in quando lezioni sul calcolo numerico, di cui la teoria, l'origine degli errori e gli ausiliari meccanici destavano in lui un particolare interesse; e così fece dei corsi sopra la trigonometria, che soleva ripetere ad intervalli costanti. Con la sua vasta coltura in tutti i campi più estesi dello scibile umano era per lui un piacere di spingere la propria azione didattica oltre le regioni della matematica pura; le sue lezioni di astronomia ebbero un grande successo ed in particolare ciò può dirsi di quelle di astronomia popolare. La sua partecipazione ai « colloqui » di fisica ha esercitata una benefica influenza in tutti i tempi sopra coloro che vi parteciparono. Da ciò si comprende agevolmente come il Ministero dell'Istruzione del nostro Granducato abbia desiderato giovarsi della grande somma di cognizioni e della grande esperienza del nostro compianto collega; epperò, a partire dal 1901, gli fu concesso di esercitare una notevole influenza sopra tutto l'insegnamento nostro in qualità di membro straordinario di quel Dicastero.

Ma l'interesse e l'attività del Lüroth si estendevano anche all'infuori della sua cattedra, in particolare quando si trattava di servire l'Università in una qualsiasi direzione. Più volte egli diresse gli affari della Facoltà o di una Sezione di essa in qualità di decano o pro-decano, sempre con abilità grande, sempre con scrupolosa osservanza dei doveri e con bontà d'animo; altrettanto dicasi della sua partecipazione al Senato accademico ed a numerose commissioni. Nell'anno 1889-90 gli fu conferita la massima dignità che a noi è dato di assegnare, quella del Pro-rettorato. Inoltre nella presidenza della Società accademica e nel comitato di redazione della Società dei naturalisti egli si

Digitized by Google

dimostrò sempre disposto ad assumere qualunque lavoro che indirettamente riuscisse di giovamento alla nostra « alma mater ».

Si comprende da sè come ad un uomo dotato di tali qualità non potevano mancare le attestazioni di stima da parte del governo e dal nostro eccelso « rector magnificentissimus ». Sin dal 1877 a Lüroth fu conferito la croce di cavaliere di I classe dell'ordine del « Zähringer Löwe », nel 1896 le foglie di quercia, nel 1902 la croce di commendatore dello stesso ordine; nel 1883 divenne « Hofrat », nel 1892 « geheimer Hofrat » e nel 1905 « geheimer Rat II Klasse ».

Oltre a queste pubbliche onorificenze Lüroth seppe cattivarsi la illimitata stima, venerazione e simpatia di tutti coloro che lo conobbero e, come è naturale, specialmente di quelli che ebbero la fortuna di avvicinarlo per ragioni d'ufficio o per amicizia. Quest'uomo del più schietto carattere e della migliore volontà, di incorruttibile fedeltà e degno della fede più assoluta rimarrà nella memoria di noi tutti che abbiamo avuta la fortuna di avvicinarlo, di lavorare con lui al bello ed elevato problema proposto a noi insegnanti universitari. Noi apprezziamo il lavoro di tutta la sua vita, quello scientifico e quello didattico; noi apprezziamo il contegno elevato e degno dell'estinto, la sua tranquillità, bontà, pacatezza che mai accennava a diminuire o mancare tanto più che noi stupefatti dovevamo convenire che era un vero eroismo, malgrado il minaccioso male d'occhi, che da tempo amareggiava l'esistenza di Lüroth, di fare ciò che egli stoicamente compiva; era un eroismo che ci sembra ancora centuplicato pensando al tormentoso mal di cuore sulla cui gravità egli non si faceva alcuna illusione ed al quale egli doveva finire per soccombere. Per effetto della troppo rapida dipartita del caro estinto soffrono la più sensibile perdita, non soltanto la moglie e la figlia, ma anche tutti coloro che avevano con lui quotidiani rapporti negli sforzi per il bene della generazione che sorge. Siamo noi, membri della Sezione fisico-matematica della nostra Facoltà filosofica, o come dovremo dire fra qualche giorno, della Facoltà fisico-matematica della nostra cara « alma mater ». In nome di essa io depongo questa corona sulla tomba del venerato collega, che ringrazio per tutto quello che fu por noi, e di cui noi serberemo per sempre il più grato ricordo.

Digitized by Google

Elenco delle pubblicazioni di J. Lüroth (*)

I. — OPERE SEPARATE.

1. Grundriss der Mechanik. München 1881.
2. Theorie der Reibung von John H. Jellet. Deutsch von Lüroth und Schepp. Leipzig 1890.
3. Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse von Ulisse Dini. Deutsch bearbeitet von Lüroth und Schepp. Leipzig 1892.
4. Vorlesungen über numerisches Rechnen. Leipzig 1900.

II. — MEMORIE.

1. Elemente der Meleta (in collaborazione col Prof. Rapp) Astron. Nachrichten Bd. 57.
2. Ephemeride der Calypso. Astron. Nachrichten. Bd. 57.
3. Beobachtungen der Urania. Astron. Nachrichten B. 59.
4. » » Asträ » » » »
5. Zur Theorie des Pascal'schen Sechsecks. Ztscht. f. Math. und Physik 1865, Bd. 10.
6. Zur Theorie der windschiefen Flächen. Journ. f. Mathematik Bd. 67. 1867.
7. Verallgemeinerung des Problems der kürzesten Linie. Zeitsch. f. Math. u. Physik Bd. 13. 1868.
8. Ueber Polartetraeder und die Schnittcurven von zwei Flächen zweiter Ordnung, ibidem Bd. 13. 1868.
9. Wie viele Kegelschnitte gibt es, die 8 Gerade im Raume schneiden? Journ. f. Math. u. Phys. Bd. 68. 1868.
10. Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung. Math. Ann. Bd. 1. 1869.
11. Eine Aufgabe über Kegelschnitte im Raume. Math. Ann. Bd. 3. 1871.
12. Ein Satz über Flächen dritter Ordnung in einer Abhandlung von Clebsch. Math. Ann. Bd. 1. 1869.
13. Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemannschen Fläche. Math. Ann. Bd. 4. 1871.

(*) In questo Elenco (dovuto al compianto Estinto e gentilmente comunicatoci dalla sua Famiglia) *non* vennero incluse le numerose recensioni pubblicate nella *Zeitsch. f. Math. u. Phys*, nel *Vierteljahrschrifts der astronom. Ges.*, nella *Zeitschrift für Vermessungskunde* e nel *Jahrb. über die Fortschritte der Mathem.*; va poi ricordata la parte che ebbe il Lüroth nella pubblicazione delle opere complete di Hesse e di Grassmann e nella compilazione della Necrologia di A. Clebsch (Math. Ann. T. VII).

Digitized by Google

14. Beweis für die Eindeutigkeit des Zählprocesses. In E. Schröders Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 1. Bd. Leipzig 1873.
15. Bemerkung über gleichmässige Stetigkeit. Math. Ann. Bd. 6. 1872.
16. Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers. Astron. Nachrichten. Bd. 73. 1869.
17. Ueber das Rechnen mit Würfen. Nachrichten v. d. Kgl. Gesellschaft d. Wiss. z. Göttingen. 1873.
18. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Math. Ann. Bd. 8. 1875.
19. Die Entfernung der Sonne von der Erde und der Venusdurchgang. Deutsche Warte, Karlsruhe 1874, Bd. 7.
20. Beweis eines Satzes über rationale Curven. Math. Ann. 1875. Bd. 9.
21. Vergleichung von zwei Werten des wahrscheinlichen Fehlers. Astron. Nachrichten, Bd. 87. 1876.
22. Ueber den Bertrandschen Beweis des Parallelenaxioms. Zeitsch. f. Math. u. Phys 1876.
23. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen (2. Abhandlung). Math. Ann. Bd. 11. 1877.
24. Zur Erinnerung an Karl Friedrich Gauss. Zeitsch. f. Vermessungswesen 1877.
25. Ueber cyklisch-projektivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume. Math. Ann. Bd. 13.
26. Ueber den Hauptsatz der projektiven Geometrie in Klein: « Nachtrag usw ». Math. Ann. Bd. 7.
27. Abänderungsvorschlag von einem Kegelschnittscirkel von Drzewiecki in einer Recension von Wiener. Zeitsch. f. Vermessungswesen. 1875. Bd. 4.
28. Neuer Beweis des Satzes, dass nicht jeder Curve vierter Ordnung ein Fünfseit eingeschrieben werden kann. Math. Ann. Bd. 13. 1878.
29. Ueber gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander. Sitz-Berichte d. phys. med. Sozietät zu Erlangen 1878.
30. Bemerkungen zu dem Beweis von Thomä über den gleichen Gegenstand. Berichte der Naturforscherversammlung zu Cassel 1878.
31. Ueber der infinitären Wert eines bestimmten Integrals: § 6 der Arbeit von E. Schröder: « Bestimmung des infinitären Werts usw ». Zeitsch f. Math. u. Phys. Bd. 1879.
32. Ein Problem der Fehlertheorie. Zeitsch. f. Vermessungswesen Bd. 10. 1880.

Digitized by Google

33. Lösungeiner algebraischen Aufgabe. Zeitsch f. Vermessungswesen. 1880. Bd. 10.
34. Notiz über die Rektifikation eines Ellipsenbogens. Zeitsch. f. Vermessungswesen. 1881. Bd. 11.
35. Ueber eine eindeutige Entwicklung von Zahlen in eine unendliche Reihe. Math. Ann. Bd. 21. 1882.
36. Ueber die kanonischen Querschnitte einer Riemannschen Fläche. Sitzungsberichte d. phys. med. Soc. z. Erlangen. 1883.
37. On measuring the height of clouds. Symons Monthly meteorological Magazine, 1883. Bd. 18. 1883.
38. Ueber die kanonischen Perioden der Abelschen Integrale Abhandl. d. Kgl. bayerischen Akademie, II. Klasse Bd. 15. 1884.
39. Eine Gleichung zwischen den Längen, Breiten und Azimuten dreier Erdorte. Zeitsch f. Vermessungswesen Bd. 15. 1886.
40. Ueber die kanonischen Perioden der Abelschen Integrale. Zweite Abhandlung. Abhandl, d. Kgl. bayer. Akad. II Kl. Bd. 16. 1887.
41. Geschichte der Infinitesimalrechnung. Universitätsschrift Freiburg, 1889.
42. Rationale Flächen und involutorische Transformationen. Programm, Freiburg, 1889.
43. Ueber die Bestimmung der Erdgestalt durch Verbindung von astronomischen und geodätischen Messungen. Zeitsch. f. Vermessungswesen, Bd. 19. 1870.
44. Beweis, dass aus den Schröderschen Prämissen der 2. Teil des Distributionsgesetzes nicht folgt. Anzeige von Schröders « Exakte Logik ». Zeitsch f. Math. u. Phys. 1891. Bd. 36.
45. Ueber die Bestimmung einer Fläche durch geodätische Messungen. Sitzungsberichte d. math. phys. Kl. d. Kgl. bayer. Akad Bd. 22. 1892.
46. Beweis eines Satzes von Bertini über lineare Systeme ganzer Funktionen. Math. Ann. Bd. 42.
47. Dasselbe, II. Math. Ann. Bd. 44. 1894.
48. Kurze Ableitung der Bedingungen, dass zwei algebraische Gleichungen meherere Wurzeln gemein haben. Zeitsch. f. Math. u. Phys. 1895.
49. Solution de la question 455. Intermédiaire des Mathematiciens. Bd. 2. 1895.
50. Ueber den gemeinsamen Faktor zweier binärer Formen. Sitzungber. d. math. phys. gesellsch. z. Erlangen 1896.

Digitized by Google

51. Das Schicksal des Tages. Beilage zur Allgemeinen Zeitung 1897. Nr. 64.
52. Ueber die Bestimmung der Erdgestalt durch Verbindung von astronomischen und geodätischen Messungen (II Note). Zeitsch. f. Vermessungswesen Bd. 26. 1897.
53. Die Bewegung eines starren Körpers (eine Uebung in der Audehnungslehre). Zeitsch. f. Math. u. Phys. Bd. 1878.
54. Ein Instrument zur Messung von Potentialdifferenzen. Zeitsch. f. Vermessungswesen Bd. 26. 1897.
55. Ueber gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander. Sitz. ber. d. phys. med. Soc. z. Erlangen. 1899.
56. Studien über die geodätische Abbildung. Math. Ann. Bd. 51. 1899.
57. Zwei Beispiele für die Ableitung der wahren aus der scheinbaren Gestalt eines Körpers. Festschrift. Freiburg. 1902.
58. Einige Beweise in dem Aufsatze, « Zur Theorie der ganzen transszendenten Funktionen ». Ber. d. Münchner Acad. 1902.
59. Nachruf an Ernst Schröder. Jahresbericht d. deutsch Math. Vereinigung, 1903.
60. Aus der Algebra der Relative. Ibidem. 1904.
61. Nachruf an Wilhelm Schell. Ibidem. 1905.
62. Eine historische Bemerkung zur Funktionentheorie. Math. Ann. Bd. 60. 1909.
63. Ueber die Extreme einer Funktion von 2 oder 3 veränderlichen Grössen. Sitzungiber. d. math. phys. Kl. d. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 36. 1906.
64. Eine neue Formel für den Rest der Taylorschen Reihe. Arch. d. Math. u. Physik. Bd. 11. 1905.
65. Ueber Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. Bd. 63. übersetzt von Capelli: Sulla corrispondenza biunivoca fra due multiplicità. Giornale di matematiche, 1908.
66. Zur Transformation der Coordinaten in Räumen konstanter Krümmung. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1907. Bd. 23.
67. Bemerkungen über die Auflösung der trinomischen Gleichungen: Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1908. Bd. 27.
68. Eine Bemerkung zum Michelsonschen Versuch. Sitzungsber. d. Kgl. bayer. Akad. d. Wiss. 1909.
69, Julius Weingarten. Boll. di bibl. e storia delle sc. mat. T. XII, 1910.

Digitized by Google

NOTA.

Lo scritto che, nel precedente Elenco, reca il Num. 57 contiene le dimostrazioni, col mezzo del calcolo vettoriale, delle seguenti proposizioni e delle loro correlative: *Un corpo il quale è tagliato in una conica da qualsia piano dello spazio è limitato da una quàdrica; in particolare, se la conica è un cerchio, la superficie è sferica* ». Esso ha dato origine ad una breve corrispondenza coll'illustre e compianto geometra, da cui credo opportuno stralciare il seguente passo, che, se non erro, presenta un notevole interesse scientifico:

(In data 26 Maggio 1902): . . . « Sono debitore al Prof. Schur di Karlsruhe di una dimostrazione rigorosa, che egli mi ha comunicata ieri. Trasformando per dualità la proposizione (da me dimostrata) si può ragionare così: Una superficie F venga tagliata da qualsiasi piano secondo una curva di second'ordine. Si conduca una retta l, che seghi F e per essa due piani, e_1 e e_2. Questi piani tagliano F in due coniche C_1 e C_2, che tagliano l negli stessi punti. Per un punto qualunque A di F e per le due coniche C_1 e C_2 si può, quindi, condurre una ed una sola superficie di secondo ordine G. Sia B un altro punto qualunque di F. Un piano passante per A e B, grazie alle fatte ipotesi, taglia F in una conica e così G: e queste due coniche coincidono, perchè hanno comuni cinque punti. Perciò B sta sopra G. Dunque F è identica a G. . . »

G. Loria.

Storia.

M. Simon. — *Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte.* Berlin, B. Cassirer 1909. 8°. p. XVII+401.

Con l'opera presente l'egregio A. porge un prezioso argomento di fatto in appoggio ad una tesi cara a chi scrive (1), all'opinione, cioè, che convenga di non separare la storia della matematica da quella delle altre manifestazioni intellettuali e sociali della vita di un popolo, in un'epoca determinata. A parare un'obbiezione, che potrebbero affacciare coloro che non dividono tale modo di vedere, osserviamo subito che, data l'antichità del periodo di tempo studiato dall'A., sarebbe forse più difficile evitare che conseguire la fusione della storia delle scienze esatte con quella della cultura, giacchè, nei primordi della civiltà, aritmetica e geometria furono studiate, non grazie al fascino che esercita la contemplazione delle verità astratte, ma in virtù delle loro applicazioni civili e religiose; in particolare, nell'antica Grecia matematica e filosofia procedettero fraternamente abbracciate, in gran parte per merito delle medesime persone. Per ciò al metodo della fusione si attennero,

(1) Cfr. *Développements relatifs au projet d'un " Manuel pour les recherckes sur l'histoire des mathématiques „*. Bibl. mathem., III Ser., T. IX, p. 227.

Digitized by Google

si può dir tutti gli storici anteriori, ma in misura assai minore di quella assunta dal Prof. Simon come norma costante di esposizione e di cui una prova visibile è offerta dalle numerose e belle illustrazioni relative alle arti, all'architettura, ecc. dei popoli che per primi lasciarono lo stato di barbarie.

E' da augurarsi che allo stesso sistema l'A. si attenga trattando (come speriamo egli si decida di fare in un non lontano avvenire) le ulteriori fasi di sviluppo della scienza a cui consacrò la sua operosa esistenza, somministrando nuove prove del fatto che il matematico, con la propria opera, dimostra di vivere in un' epoca determinata e di subire l' influenza del mezzo in cui opera.

Quali siano gli argomenti trattati nell'opera del Simon e quale il loro ordine di successione emerge dal seguente Indice, che riteniamo tanto più opportuno di presentare agli occhi dei nostri lettori perchè l'A. non ha giudicato necessario di inserirne uno nella propria opera, limitandosi a porre infine un Indice dei nomi e delle cose:

« Cap. I. *Egitto.* — Storia dell' Egitto. Lingua, scrittura, culto. Metrologia. Aritmetica egiziana. Le equazioni quadratiche presso gli antichi Egiziani. Geometria, trigonometria, geometria descrittiva (1).

Cap. II. *Babilonia ed Assiria.* — Storia. La scrittura cuneiforme. Arte. Metrologia. Matematica. Astronomia ed astrologia.

(Cap. III?) *Ellade.* — Generalità. Talete. Anassimandro. Pitagora ed i Pitagorici. Gli Eleati. Parmenide e Zenone. Anassagora. Oinopide. Ippocrate da Chio. Brisone. Eraclito. Democrito. Platone. Archita. Eudosso. Menecmo. Ippia. Dinostrato. Teeteto. Teudio. Aristotele. Euclide, Archimede. Apollonio. Nicomaco. Zenone. Ipparco. Erone. Teudio. Gemino. Posidonio. Menelao. Tolomeo. Teone da Gerasa. Giamblico. Timarida. Filone. Diofanto. Pappo.

Epilogo ».

A tutti è noto lo stile del primo vero storico della matematica — il Montucla, — stile improntato a quella gioviale bonomia che sembra prerogativa dei discorsi dei vecchi. E' pur noto lo stile ben diverso di M. Cantor, stile impassibilmente sereno, quale taluno giudica come indispensabile alla togata di-

(1) A chiarimento di queste ultime parole valgono le frasi seguenti: « Non Monge, non Lambert, non Dürer sono i creatori della geometria descrittiva; qui, Signori, loro vedono un disegno eseguito sopra la pietra formante la piattaforma del « Plyon », presa dal Borchardt nel 1878, ove si trova pianta ed alzato con le relative misure, ed esiste tuttora la colonna che fu costruita col loro aiuto ». (p. 53).

Digitized by Google

gnità della storia. Ben differente da entrambi è il modo di scrivere dell'A.; di regola vivace e spiritoso, diviene talora pugnace e polemico; sicchè chi ha il piacere di conoscere di persona il simpatico autore troverà in questo suo nuovo volume un'impressionante conferma dell' antica massima « lo stile è l'uomo »!

Nel Simon l'investigatore della storia antica non sopprime il cultore della scienza moderna; onde ad ogni passo del suo libro si trovano interessanti paralleli fra le idee e le questioni dibattute in Oriente ed in Grecia ed i problemi che tuttora affaticano matematici e filosofi: è questa una caratteristica che giova esplicitamente rilevare, perchè varrà indubbiamente a far ricercare e gustare l'opera di cui discorriamo anche da parte di coloro che sentono maggiore propensione per la scienza che per la sua storia. E tale sopravvivenza del matematico sopra l'erudito porge una spiegazione (o, se meglio piace, riceve una conferma) nel sistema delle « citazioni telegrafiche » adottato dall'A., il quale talvolta pone a ben dura prova le facoltà divinatorie del giovane lettore e che si direbbe ispirato al sentimento di esagerata modestia di nascondere la grande erudizione dell'A.

Antico, schietto e costante ammiratore di M. Cantor, l'A. è però spesso costretto a dissentire dalle conclusioni raggiunte da questo storico, indotto non di rado a farlo dai documenti che scopersero ai dì nostri Orientalisti ed Ellenisti fortunati. La storia, al pari della scienza, tende alla verità, ma per vie ben diverse; mentre il progresso della matematica non obbliga a sostituire edifici totalmente nuovi a quelli eretti dai maggiori, il lavoro degli storici è spessissimo simile alla eterna fatica di Sisifo: il masso delle nostre cognizioni, sospinto da vigorosi lavoratori, sale per l'erta e si accosta alla mèta; ma, mentre sembra che un ultimo sforzo debba far raggiungergli la vetta, eccolo precipitare dalla parte opposta del monte, obbligando gli operai ad una ripresa da capo. E nessun esempio, tratta dalla storia della nostra scienza, può servir meglio di illustrazione a tale sconfortante prospettiva posta davanti agli storici, della famosa « questione eroniana »; Letronne, Martin, Hultsch (per non ricordar che alcuni nomi) si cullarono successivamente nell' illusione di averla risolta; sarà definitiva la soluzione che risulta dalle pagine del Simon, ottenuto in base all' edizione, oggi reputata degna del motto « ne varietur », delle opere del celebre meccanico Alessandrino? Auguriamolo, ma non azzardiamoci a farcene garanti!

Chiuderemo queste osservazioni con alcune poche osserzioni di dettaglio, che trascegliamo fra le molte che varrebbe la pena di fare.

Digitized by Google

p. 43. L'A. dà una spiegazione del valore di π adottato dagli Egiziani ben differente da quella che suggerì G. Vacca (*Bollettino,* XI, p. 65-7).

p. 121. L'A. sembra avesse l'intenzione di non parlare dei matematici indiani; ma poi (p. 137-65) fu costretto a rinunciare a tale disegno per lumeggiar la storia del teorema di Pitagora.

P. 124. Egli si aggrega alla schiera di coloro che ritengono essere il 25 Maggio 585 la data del celebre eclisse di Talete, senza però dir le ragioni di tale attitudine.

P. 215. L'A. si trattiene sopra Aristotile con visibile e spiegabile compiacimento, per rilevare nelle sue opere concetti che diedero e dànno molto filo da torcere a matematici e filosofi.

P. 256. Reputiamo interessante riferire il seguente passo: « Si ammette sempre che gli Elleni non abbiano visto nell'irrazionale alcun numero: ma dal V Libro (degli *Elementi* di Euclide) emerge indiscutibilmente che essi possedevano il concetto di numero in modo completo (e che quasi raggiunge la precisione che si trova in Weierstrass) e che Eudosso, come Euclide, nel rapporto di due grandezze omogenee scorgeva niente altro che un numero ».

P. 285. Va notato il nuovo enunciato del celebre « problema dei buoi » di Archimede.

P. 349. Segnaliamo le informazioni utili sopra un'opera di Nicomaco che prima non era stata considerata a dovere dagli storici.

P. 371. L'asserzione che in Pappo si trovino già le costruzioni di Mascheroni ci sembra più piccante che vera; si consultino infatti, i passi relativi del T. I. delle *Vorlesungen* del Cantor (II ed. p. 421 e III ed. p. 450).

G. L.

J. A. DECOURDEMANCHE. — *Traité pratique des poids et mésures des peuples anciens et des Arabes.* 8° p. VII+144. Paris, Gauthier-Villars 1909 (Prezzo fr. 5).

Fra le discipline ausiliari della storia due riposano sopra fondamenti matematici, la Metrologia e la Cronologia; quella si giova di semplici considerazioni aritmetiche, mentre questa ha i propri fondamenti nella conoscenza del moto degli astri. L'opera che segnaliamo costituisce un notevole contributo alla antica cronologia, del quale certamente trarranno gran profitto gli storici futuri; ma poichè ivi elementarissime sono le considerazioni matematiche e nessun legame è stabilito con le

Digitized by Google

vicende delle scienze esatte nelle antiche età, non è il caso di darne più di un semplice annuncio.

G. L.

Opere complete ed Enciclopedie.

Opere matematiche di Francesco Brioschi. — Milano, U. Hoepli. 4.° Vol, I, 1901, p. XII+416. Vol. II, 1902, p. VIII+546. Vol. III, 1904, p. X+435. Vol. IV, 1905, p. X+418; Vol. V, 1909, p. XII+556 (Prezzo L. 130).

Con viva soddisfazione annunciamo ai nostri lettori il compimento del ben meritato monumento che l'Italia ha innalzato ad uno dei più gloriosi suoi figli; a colui che, continuando degnamente le tradizioni della scuola matematica pavese, seppe tener alto il nome della patria nostra in tutte le questioni di analisi, che furono dibattute nella seconda metà del Secolo XIY. Non fa mestieri che noi rileviamo lo splendore e correttezza dall' edizione, opera della Tipografia matematica di Palermo; giacchè le nostre parole nulla potrebbero aggiungere alla invidiabile lode che implicitamente scaturisce dall' esser essa stata presa a modello nel lavoro preparatorio alla pubblicazione delle *Opere complete di Eulero.* Nè muoveremo alcun appunto all' ordinamento della materia, dal momento che gli editori stessi riconobbero che ben meglio sarebbe stato distribuirla in ordine di tempo e cercarono rimediarvi col chiudere l' ultimo volume con un indice cronologico dei 279 scritti inseriti nella raccolta intera. Ma non possiamo esimerci dal lamentare che siano state esclusi tre lavori pubblicati a parte, che certamente non erano indegni di portare la firma dell' illustre analista lombardo, tanto vero che sono tuttora spesso citati con onore. La ragione addotta per giustificare tale decisione (l'avere, cioè, quei lavori omai soltanto *un valore storico)* non ci sembra convincente, perchè, applicandola in ogni occasione, un considerevole numero di scritti che si trovano inseriti nelle « Opere complete » di eminenti scienziati, avrebbero subito la pena dell' ostracismo; e, d' altronde, non è forse uno degli scopi (e non l' ultimo) che ci si propone adunando gli scritti dispersi dei pensatori più illustri quello di fornire agli storici futuri gli elementi necessari per tracciare un quadro dello sviluppo di una data branca di scienza in un determinato tempo? Una lode va invece tributata ai diligentissimi editori per avere dato l'elenco di

Digitized by Google

quegli scritti del Brioschi che, per l'indole loro, non sembrarono da ascriversi fra le « opere matematiche » del grande matematico pavese.

G. L.

L. Fuchs. — *Gesammelte mathematische Werke. Herausgegeben von* R. Fuchs *und* L. Schlesinger, III Band. Berlin, Mayer und Müller, 1909. 4.° p. X+460 (Prezzo Mk. 28).

Segnaliamo con piacere la comparsa di questo volume, con cui si chiude una pubblicazione di cui ci siamo già occupati (cfr. *Bollettino,* T. VIII, p. 42 e XI, p. 10) Oltre alle ventisette memorie pubblicate dall'autore nel periodo 1888-1902 sopra i temi a cui egli si serbò fedele sino al termine della sua vita, vi si trovano tre orazioni, una pronunciata a Greifswald (1873) sopra la connessione fra le comete e le stelle cadenti, altre due dette a Berlino (1899 e 1900), sopra i rapporti fra le scienze esatte e la pratica e sopra alcuni risultati della ricerca matematica del Secolo XIX. Seguono le brevi necrologie di Helmholtz, Cayley, Schläfli, Dienger, Weierstrass, Schering, Brioschi e Hermite, scritte dal Fuchs nella sua qualità di direttore del *Journal für die reine und angewandtte Mathematik.* Il volume si chiude con un diligente indice per materie dei tre volumi, redatto dallo Schlesinger con intelletto d'amore.

G. L.

Filosofia.

H. Poincarè. — *Science et méthode.* 8.° p. 314. Paris, E. Flammarion, 1908 (Prezzo fr. 3.50).

Il volume che annunciamo è il terzo di una serie i cui primi elementi (cfr. *Bollettino,* T. VIII, 1905, p. 103 e 104) ottennero un tale incontrastato successo che la loro tiratura raggiunse le cifre (che sembrano fantastiche, trattandosi di opere scientifiche) di 16 e 12 mila copie e che portarono il loro autore a sedere fra gli immortali dell'Accademia francese. E' facile predire che al nuovo volume la sorte si mostrerà altrettanto amica. Vero è che le idee ivi esposte sono meno originali ed urtanti di quelle a cui è informato il bel libro sopra *La science et l'hypothèse;* e che molte parti di esso sono note ai lettori della « Revue de métaphysique et de morale » e de « L'en-

Digitized by Google

seignement mathématique ». Ma, per compenso, lo stile dello autore è divenuto meno aspro, più flessuoso e seducente e d'altronde quelle parti non vennero riprodotte senza subire ritocchi di sostanza e di forma, i quali valsero a mettere meglio in luce le idee direttive che informano tutta l'opera filosofica del grande geometra francese.

Il nuovo volume è diviso in quattro libri i cui temi sono rispettivamente: *Lo scienziato e la scienza; Il ragionamento matematico; La meccanica nuova; La scienza astronomica;* si apre con una breve introduzione e si chiude con alcune considerazioni generali. Se il matematico puro s'interesserà maggiormente ai due primi libri, che trattano temi di sua diretta pertinenza, i due ultimi apriranno dinnanzi ai suoi occhi dei nuovi campi, in cui la fantasia di eminenti scienziati ebbero libero corso per congegnare spiegazioni plausibili di fenomeni fisici che sbalordiscono per la loro novità e sembrano contrastare a canoni scientifici fino a ieri indiscussi.

Sarebbe troppo asserire che tutti accoglieranno senza discussione le opinioni del celebre autore e che tutti (specialmente i così detti « logici ») accoglieranno certi giudizi e subiranno in pace certe condanne; ma non v'ha dubbio che dai conseguenti inevitabili dibattiti il nostro patrimonio scientifico non avrà che da avvantaggiarsi; e non è forse questo il fine più elevato di qualsia produzione della mente umana?

G. L.

Meccanica.

F. Caldarera. — *Memoria sul moto dei pianeti.* (Seconda edizione migliorata). Palermo: Stabilimento tipografico Virzi, 1911, in 4.°, pag. (prezzo L. 3).

Il moto ellittico dei pianeti, centrale rispetto ad un fuoco S, si suol definire in funzione del tempo pel tramite di un elemento ausiliario, la anomalia eccentrica u, legata al tempo dalla classica equazione di Kepler. Il significato geometrico dell'anomalia eccentrica si ha notoriamente, associando all'orbita ellittica la circonferenza circoscritta C, che insiste sull'asse maggiore.

Nella Memeria in esame si sostituisce a C una circonferenza circoscritta I, avente il centro nel fuoco S e il raggio eguale alla distanza afelia. Mediante questa circonferenza, si coordina ad ogni posizione dell'orbita un nuovo elemento ausiliario, *l'anomalia concentrica* v. Essa ha significato geometrico analogo alla u per una certa porzione della circonferenza I: nella porzione

Digitized by Google

rimanente non le rimane per coordinata alcuna posizione del mobile. Ad ogni modo si può proporsi di esprimere tutti gli elementi del moto mediante v, e la v per il tempo t, come si fa abitualmente per l'argomento u. L'A. tratta con ampiezza dei vari sviluppi che servono all'uopo. In quelli procedenti per seni e coseni di multipli di v, difficoltà di convergenza possono sorgere dal fatto che v deve intendersi variabile fra due limiti diversi da $\pm\pi$.

In linea di massima, l'introduzione delle circonferenze iscritte I e del relativo moto medio può divenire espressiva quando si considerano simultaneamente più pianeti. Le varie I vengono a costituire un diagramma di cerchi concentrici, del tipo già caro agli antichi, che pareva definitivamente tramontato assieme al sistema tolemaico.

Ben possiamo rallegrarci della indefessa attività del Professore Caldarera. In lui, che è tra i più anziani per età e per carriera, persiste vivissimo l'amore disinteressato di ricerca. Mirabile ed augurale esempio ai colleghi!

T. Levi-Civita

Ingegneria.

Ing. G. Pizzamiglio. — *Costruzioni metalliche. Vade-mecum per le costruzioni civili in ferro, acciaio e ghisa.* Milano, Ulrico Hoepli, 1911 (Prezzo L. 18.50).

L'ingegneria, professata col massimo ossèquio ai principi tecnici, che scaturiscono dallo studio delle matematiche, non è cosa essenzialmente diversa, ma bensì un'applicazione diretta delle matematiche stesse.

Che nelle opere d'indole tecnica si cerchi di eliminare in linea generale le ragioni matematiche, è cosa risaputa e forse non abbastanza lamentata, ma che vi sia però anche la possibilità del procedere parallelo dei due rami della scienza, lo mostrano pregevoli pubblicazioni appartenenti al campo della tecnica elevata, che tanto bene fanno alle menti di coloro che vogliono apprendere.

A queste pubblicazioni appartiene il recente libro del chiarissimo Ing. Pizzamiglio sulle Costruzioni metalliche, che merita di essere segnalato non solo sulle Riviste d'Ingegneria, che già se ne sono occupate, ma eziandio su quelle, come la presente, che appartengono al campo della matematica pura.

Digitized by Google

In essa l'egregio Collega ha tentato di ricondurre una delle branche più importanti dell'ingegneria ad una maggiore severità di disciplina, pervenendo ai risultati finali delle varie questioni non per cognizioni empiriche, ma per trasformazioni di formule, delle quali è data la ragione matematica.

La resistenza dei materiali, pur essendo trattata senza quegli sviluppi teorici che sarebbero stati superflui per i professionisti, ha però nel suo insieme quell'indirizzo che ad essa hanno dato i più illustri suoi cultori dal Saint-Venant al Guidi, sicchè il lettore trova inquadrate nelle pagine di questa parte del libro le risoluzioni grafiche ed analitiche che gli converrà di applicare in seguito nella trattazione pratica.

La parte riguardante i carichi, mobili è un vero esame sugli effetti di questi carichi con impostazione delle relative formule e diagrammi, e collo studio finale sulle linee d'influenza, esposto in modo semplice e facile.

Delle applicazioni pratiche concernenti il campo delle costruzioni metalliche non è quì il luogo di parlarne. Merita pertanto rilievo la trattazione degli archi, sia a cerniera che incastrati, dei quali è data l'equazione in termini finiti della spinta, rimandandosi il lettore, che è in grado di comprendere la trattazione teorica, all'ultima parte.

E' questa parte, invero, che incontra maggior consenso per il suo sviluppo sobrio ma pur completo, avuto riguardo ai limiti di un manuale. In questa parte l'A. procede colla teoria del lavoro virtuale e coll'espressione del lavoro di deformazione, alla ripresa dei problemi riferentisi ai sistemi staticamente indeterminati da lui trattati in precedenza in via approssimata, e ne dà l'esatta e ragionata risoluzione.

Un ultimo meritato rilievo va fatto allo studio sugli sforzi secondari, studio che richiama l'attenzione dei tecnici sulle gravi conseguenze cui può dar luogo nel calcolo delle costruzioni pratiche, il trascurare questi sforzi.

La trattazione efficace di questo capitolo prova una volta ancora come il concorso delle matematiche sia valido aiuto allo ingegnere nella risoluzione di questioni, che l'empirismo pratico non può raggiungere.

Tali i pregi principali della nuova pubblicazione, la quale, rifuggendo dall'empirismo che incatena, eleva lo spirito e la mente degli studiosi. Ad essa, auguri di fortuna.

SALVATORE SPERA.

Digitized by Google

Meccanica Sociale.

Sp. C. HARET. — *Mecanique sociale.* Paris, Gauthier-Villars, 1910. Prezzo 5 fr.)

Dopo che il Congresso di Sociologia del 1897 ha sepolte onorevolmente le teorie *organiciste,* miranti a protendere alle società umane le leggi del mondo biologico, sono ritornate in onore le teorie *meccaniciste,* che raffigurano le società umane siccome un meccanismo, soggetto a leggi statiche e dinamiche, esprimibili in formule matematiche. Codesto nuovo indirizzo — che può a buon diritto farsi forte dell'autorità di Augusto Comte, e che ebbe già espressione notevole in un libro del Wizniarski, dal titolo identico a quello dell'opera qui esaminata — riceve ora svolgimento ed applicazione ulteriore nell'opera dell'Haret; il quale non si perita di applicare ai complessi fenomeni dell'aggregato umano le notazioni più delicate della meccanica razionale. Che il suo libro dimostri davvero la fecondità e convenienza del metodo da lui praticato, è cosa di cui ci permettiamo di dubitare, e di cui dubiteranno tutti coloro, che di esso libro faranno attenta lettura. Infatti, ove ben si guardi, quest'opera racchiude una serie di studi, ciascun dei quali consta di due parti nettamente distinte; irta la prima di formule matematiche, la seconda discettante in forma piana ed amabile dei più vari fenomeni ed istituti sociali. Ebbene, in ogni caso, questa seconda parte è totalmente indipendente dalla prima e può intendersi senza ricorrere a questa, in quanto che contiene osservazioni sensate, aggiustate spesso, non mai profonde, cui può giungere il più elementare buon senso senz'uopo di formule e di figurazioni geometriche. Così p. es. le osservazioni sui processi di infiltrazione mentale e morale, che si compiono fra due popoli nelle zone di frontiera, si intendono perfettamente e strappano incondizionato il suffragio, senz'uopo di fare appello alla legge della diffusione dei gaz, la quale annebbia all'opposto in guisa deplorevole la nitida nozione delle cose. Il moto ondulatorio, che si produce in una società qualsiasi sotto l'azione di una nuova corrente di pensiero, può perfettamente comprendersi (e lo stesso autore esplicitamente lo dice) senz'uopo della curva C, a cui egli dedica si laboriose disquisizioni, ecc. ecc.

Ma queste considerazioni pregiudiziali, che la coscienza ci imponeva di affermare, non attenuano punto il merito del lavoro, il quale racchiude osservazioni acutissime e critiche meditate di dogmi pei più ineluttabili. — Avvertiamo qui in prima linea le giuste censure ai calcoli dell'interesse composto,

Digitized by Google

a norma dei quali, ad es., 5 lire accumulate durante 1346 anni darebbero un valore pari a quello di una massa d'oro del volume del nostro globo. — L'A. non ha pena a discernere tutta la radicale fallacia di codeste computazioni, le quali non avvertono che, a porre in opera queste accumulazioni continuamente ingrossantisi, sarebbe d'uopo di una popolazione correlativamente crescente, ed incompatibile coi limiti rigorosi inflitti al movimento demografico. — L'argomento sarebbe anzi suscettibile di ben maggiore sviluppo, poichè, dato (secondo i calcoli di Malthus) che le sussistenze non possono crescere che in progressione aritmetica, è ben sicuro che anche la popolazione vitale non può crescere che secondo questa progressione, e che perciò secondo tale progressione, o non oltre, può aumentare il capitale, che la popolazione fa fruttificare col suo lavoro. Dunque l'ipotesi stessa di un aumento del capitale in progressione geometrica, che sta a base dei calcoli dell'interesse composto, è radicalmente irrazionale, almeno quando sia riferita al capitale nella sua totalità. Bensì può ammettersi che aumenti, per qualche tempo, in progressione geometrica il capitale individuale, ove questo s'accresce, anzichè mediante la produzione, mercè l'annessione del capitale altrui; ma in tal caso però l'aumento del capitale trova un limite ben altrimenti perentorio nella massa della ricchezza esistente, che esso non può dilatare, e perciò rimane in ogni caso ben lunge dai fastigi, a cui vorrebbe elevarlo il calcolo, di cui si ragiona.

Ed anche è interessante il disegno di riforma economica adombrato dall'autore; il quale vorrebbe che l'interesse del capitale originario, frutto del lavoro dell'accumulante, fosse attribuito integralmente a costui, ma che invece gli interessi degli interessi accumulati andassero almeno parzialmente devoluti ai debitori, al cui lavoro quelle accumulazioni sono dovute. P. es., se A ha prodotto 100 lire col suo lavoro e le presta ad interesse 5, poi accumula questi 5 e li presta ad interesse 0,25, nell'interesse totale di 5,25 dovuto al capitale di 105, 5 debbono andare al creditore, ma 0,25, od una lor parte, al debitore, perchè al suo lavoro soltanto si deve il capitale addizionale di 5. È un'opinione che l'economia ortodossa non esiterebbe a ribattere, opponendo che l'interesse non è già il compenso del lavoro ma della astensione dal consumo, la quale, nel caso concreto, si esercita, non già solo sul capitale iniziale di 100, ma inoltre sul capitale sopraggiunto di 5; ma è ad ogni modo una tesi meditabile, la quale non fa poi la peggior figura nel florilegio di disegni innovatori, ond'è si ricco il nostro tempo.

ACHILLE LORIA

Digitized by Google

Analisi infinitesimale.

G. KOWALEWSKI. *Grundzüge der Differential-und Integralrechrung.* Leipzig und Berlin, Teubner, 1908, 8° p. VI+452 (Prezzo Marchi 12).

Ecco un nuovo corso elementare di Calcolo infinitesimale, che l'instancabile solerzia della casa Teubner offre al pubblico matematico. Ne riassumiamo in breve il contenuto:

C. 1-3. Numeri irrazionali, limiti, operazioni sui numeri reali. C. 4-5. Funzioni una o più variabili, rappresentazione geometrica, continuità. C. 6. Derivate e differenziali d'ogni ordine. Teoremi sulle derivate; teorema di Rolle; formola di Taylor. C. 7-8. Serie; serie di potenze, applicazioni; serie di Taylor. C. 9. Massimi e minimi delle funzioni d'una variabile. C. 10. Derivate e differenziali delle funzioni di più variabili. C. 11. Massimi e minimi delle funzioni di più variabili. C. 12. Funzioni inverse; funzioni implicite. C. 13. Integrale indefinito. Teoremi e formule fondamentali. Metodi d'integrazione. C. 14. Integrale definito. Condizione d'integrabilità. Integrali superiore e inferiore. Teoremi sugli integrali. Funzioni a variazione limitata. Studio di alcuni integrali definiti. C. 15. Integrazione per serie; serie trigonometriche, serie di Fourier. C. 16. Integrali impropri. Integrali euleriani. C. 17. Aree piane; archi di curve piane e sghembe. C. 18. Integrali doppi. Integrazione e derivazione sotto il segno. Integrali curvilinei. Formola di Green. Trasformazione degli integrali doppi. C. 19. Volumi; aree di superficie curve. Appendice: Determinanti; sistemi lineari; determinanti funzionali.

Questo riassunto, mentre dimostra come l'autore abbia saputo condensare una notevole quantità di materiale in uno spazio relativamente piccolo, non può a meno di far nascere qualche dubbio intorno ai criteri seguiti sì nella *scelta* che nella *disposizione* della materia. L'esame dell'opera stessa non fa che ribadire tali dubbi. Perchè, per esempio, l'autore si è esteso sull'integrale di Dirichlet, sugli integrali euleriani, sulle serie trigonometriche, sulla formola di Green, e ha lasciato da parte argomenti elementari ed importanti come il calcolo delle espressioni indeterminate, le formule per il cambiamento della variabile indipendente, i teoremi sulle funzioni omogenee, la teoria della curvatura delle linee, etc.? Perchè non ha premesso la serie di Taylor a quegli sviluppi che opportunamente sogliono dedursi come applicazioni di essa? Perchè non ha riunito la teoria dei prodotti infiniti a quella della serie? Un'altra cosa a noi riesce incomprensibile, e cioè, a quale scopo l'autore abbia posto in

Digitized by Google

fine al volume un' appendice sui determinanti, mentre evitò sempre di servirsene anche con danno della brevità e della generalità. Ma le questioni d'ordine e di metodo sono più soggettive che oggettive, e perciò non è il caso di insistervi troppo. D' altra parte le piccole mende sono compensate dalla forma eccellente dell' esposizione, che al perfetto rigore accoppia generalmente una semplicità, e diremmo quasi, un'agilità, più comune tra gli scrittori francesi che tra i tedeschi. Molti punti presentano anche una felice originalità; l' autore ama sovente allontanarsi dalle vie battute per prendere scorciatoie che lo conducono più rapidamente alla meta. Citiamo la dimostrazione della esistenza d' un punto limite, la teoria delle operazioni sui numeri reali, lo studio della successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Una nota simpatica per noi italiani: il libro è dedicato alla memoria del compianto Ernesto Cesàro.

G. VIVANTI

V. VON DANTSCHER. *Vorlesungen über die Weierstrass'sche Theorie des irrationalen Zahlen.* Leipzig und Berlin, Teubner, 1908 P. VI + 80 p. 8°. (Prezzo Marchi 2.80).

È noto che dobbiamo a Weierstrass la prima teoria logicamente rigorosa dei numeri irrazionali. Questa teoria, esposta da lui soltanto oralmente, è giunta a noi per gli scritti dei suoi allievi, primi dei quali Kossak e Pincherle. V. von Dantscher, che ebbe egli pure la fortuna di sentirla dalla bocca del maestro, ne fa nel presente opuscolo un' esposizione particolareggiata chiara e rigorosa, che verrà certo accolta con piacere da tutti coloro che s' interessano alle questioni fondamentali della matematica moderna.

G. VIVANTI

J. THOMAE. *Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen.* Leipzig und Berlin, Teubner, 1908, 8° p. VI + 182. (Prezzo Marchi 7.80).

Scopo di quest' opera è il calcolo effettivo degli integrali definiti. Dopo un breve capitolo introduttorio sui fondamenti della teoria delle funzioni, viene definito l' integrale, prima come inverso della derivata, poi come limite d' una somma, e si stabiliscono i principali teoremi del Calcolo integrale. Segue

Digitized by Google

uno studio accurato degli integrali impropri, accompagnato da esempi interessanti. Dopo di ciò l'autore passa alle serie di Fourier, alle quali, egli dice, è dovuto un notevole sviluppo della teoria degli integrali definiti; dimostra le formule fondamentali e ne fa l'applicazione ad alcuni esempi, esamina la questione dell'integrabilità e della derivabilità termine a termine, ed accenna a quella dell'unicità dello sviluppo; tratta in particolare il problema delle corde vibranti. Prima di continuare lo studio degli integrali definiti, l'autore ritiene opportuno di sviluppare la teoria degli integrali doppi, al cui sussidio, come è ben noto, hanno ricorso non di rado gli analisti per il calcolo degli integrali semplici (esempio l'integrale di Laplace); un tipo notevole di integrali doppi è l'integrale di Fourier. Tornando al suo argomento, l'autore viene a trattare degli integrali euleriani: funzione *beta*, funzione *gamma*, derivata logaritmica di quest'ultima, formola di Stirling. L'ultimo capitolo è dedicato all'integrazione dei differenziali totali a due variabili ed agli integrali curvilinei ed imaginari.

G. Vivanti

J. A. Serret — *Lehrbuch der Differential -- und Integralrechnung.* Nach Axel Harnacks *Uebersetzung.* III *Auflage, neu bearbeitet von* Geoege Scheffers.

II. Band: *Integralrechnug, mit 105 Figurem im* Text. Leipzig, Teubner 1907. 8.° p. XIV+586 (Prezzo del vol. leg. Mk. 13).

III Band: *Differentialgleichungen und Variationsrechnung.* Mit 63 Figuren im Text. Leipzig, Teubner 1909· p. XII+650. (Prezzo del vol. leg. Mk. 13).
Cfr. *Bollettino,* XI, p. 56.

Estratto dalla Prefazione al II volume: « Anche nel presente volume venne badato ad una esposizione chiara e semplice. Mediante più di cento figure che io disegnate tutte nuovamente, il testo divenne più intelligibile e vivace. Del rimanente vale per questo volume quanto si espose nella Prefazione al I Vol. ». . . .

Estratto dalla prefazione al III volume: « In misura ancora più forte di quanto accadde pei due primi volumi, questo terzo venne sottoposto ad un radicale rimaneggiamento. Mentre nei due primi venne mantenuta una rigorosa separazione fra le considerazioni relative al campo reale e quelle concernenti il campo complesso, per la teoria delle equazioni differenziali ordinarie si manifestò la necessità di mantenersi nel campo reale.

Digitized by Google

In tal modo si è ottenuto che è facile trovare nei tre volumi di tutta l'opera quei capitoli in cui si evita l'immaginario. La qual cosa è desiderata da quei giovani studenti che ignorano ancora la teoria delle funzioni. Inoltre, anche avuto riguardo alle applicazioni a problemi di meccanica e fisica, sembra giustificato lo svolgere a parte la teoria reale.

Di più parve desiderabile d'introdurre anche i metodi d'integrazione del Lie fondati sull'applicazione delle trasformazioni infinitesimali, dal momento che, paragonati a quelli fondati sul moltiplicatore, stanno teoricamente allo stesso livello, mentre li superano in pratica. Alcuni lemmi relativi si trovano già nella II edizione; la nuova esposizione svolge la detta teoria fino al punto in cui non è necessario ricorrere che al concetto di gruppo monomio. Ma siccome la quantità di materia rese necessario uno stile conciso assai, così si ebbe cura di fare in modo che i paragrafi che trattano dei metodi del Lie potessero anche venire lasciati in disparte.

Inoltre si deve anche considerare come un progresso il fatto che nella nuova redazione si è data grande importanza alle esatte definizioni dei concetti, come ad es. al concetto di soluzione singolare, che si è ricondotto a quello di elementi singolari (x, y, y') ecc. Inoltre furono introdotte parecchie novità, come l'esposizione di Cauchy per l'integrazione d'un sistema di d'Alembert nel caso generale, l'integrazione di sistemi completi, e, come corollario, il moltiplicatore di Jacobi ed il principio dell'ultimo moltiplicatore. La teoria delle equazioni a derivate parziali di I ordine si trova ora esposta anche col metodo di Cauchy usufruendo in fondo del concetto di striscia caratteristica introdotto dal Lie ed inoltre vien fatto cenno, benchè rapidamente, delle equazioni differenziali di Monge.

L'ordine della materia è rimasto, come è ben naturale, in sostanza quello antico. Però in principio venne introdotto un capitolo di orientamento sopra le varie specie di equazioni differenziali. Il numero degli esempi fu aumentato, ma a dir vero non quanto sarebbe stato desiderabile. Quasi tutti gli esempi contenuti nella II edizione si ritrovano nella III, ma in parte spostati, nel senso che sembrò opportuno.

Siccome il volume non doveva riuscire troppo grosso, si dovette sacrificar qualchecosa dell'antica materia. In genere io ho soppresso soltanto qualche sviluppo sul calcolo d'integrali definiti e la sommazione di una serie infinita mediante un'equazione differenziale, cose che in realtà avevano piuttosto l'apparenza di episodi, ed inoltre la considerazione sopra le equazioni a derivate parziali d'ordine superiore. Ciò credo di potere giu-

Digitized by Google

stificare con la considerazione che p. es. la nuova teoria dei sistemi completi è assai più importante, che inoltre le equazioni a derivate parziali d' ordine superiore escono fuori dei confini d' un trattato destinato a studenti dei tre primi semestri universitari e che finalmente i risultati sinora noti relativi ad esse sono soltanto particolari . . .

Anche l' ultimo capitolo che del resto porta ora un titolo più modesto (« Introduzione al calcolo delle variazioni ») ha subito una trasformazione, ma nell' insieme ha mantennto la stessa estensione di prima. Nella II edizione mancava la definizione di « valore estremo » d' un integrale, che si trova nella III. Per evitare le difficoltà che s' incontrano trattando integrali con limiti variabili, tali integrali furono trasformati in altri con limiti costanti, servendosi di opportune sostituzioni.

Alcuni dubiteranno forse se il libro si possa ancora designare come del *Serret*. Ma siccome l' antico testo ha servito di guida anche per la nuova redazione e da esso furono tolti quasi tutti gli esempi e siccome il III volume forma — almeno così spero — coi due primi un tutto, così l' opera merita di portare come scudo onorifico l' antico nome . . . ».

P. S. Mentre il precedente annunzio aspettava il suo turno per venire inserito, la terza edizione dei due primi volumi del trattato Serret-Scheffers si esauriva così rapidamente che la Casa Teubner credette opportuno di pubblicare subito contemporaneamente le edizioni IV e V (1908 e 1911). Mentre per quanto concerne il I volume, trattandosi di piccole modificazioni nei particolari, non è il caso di arrestarvisi, riguardo al II osserveremo che lo Scheffers lo arricchì di copiose note storiche relative ad entrambi i volumi I e II, promettendo di fare altrettanto per il III, se, come è certo, si presenterà il bisogno di ristamparlo. Basti ciò a dimostrare quanto egli si studi di conservare il favore che il pubblico matematico gli ha generosamente accordato.

G. L.

L. Schlesinger. — *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*. Leipzig und Berlin, Teubner, 1908. X + 334 p. 8.° (Prezzo Mk. 10).

La caratteristica di questo corso di lezioni sulle equazioni differenziali lineari è l' uso costante del calcolo delle matrici, iniziato dal Volterra in due importanti lavori inseriti nelle Memorie della Società dei XL (vol. VI, 1887, e XII, 1899). Assunti come elemento fondamentale una matrice di n^2 funzioni, e defi-

Digitized by Google

nite opportunamente la *derivazione* e l'*integrazione* delle matrici, si possono per queste operazioni stabilire regole del tutto analoghe a quelle ben note del calcolo infinitesimale. L'applicazione alla teoria dei sistemi d'equazioni lineari del primo ordine è ovvia; l'integrazione di un tale sistema equivale all'integrazione d'una matrice. Con ciò la teoria dei sistemi lineari viene ad acquistare un aspetto notevolmente simmetrico ed elegante, e la sua analogia colla teoria dell'integrazione d'un'unica equazione appare in piena luce.

Non crediamo utile entrare in maggiori particolari sul contenuto di questo volume, e ci limitiamo a raccomandarne vivamente la lettura a chiunque voglia intraprendere lo studio della teoria moderna delle equazioni differenziali.

G. VIVANTI

N. NIELSEN. — *Lehrbuch der unendlichen Reihen.* Vorlesungen gehalten an der Universität Kopenhagen. Leipzig und Berlin, Teubner, 1909, 8.° p. VIII+287. (Prezzo Mk. 11).

Si può dire veramente che questo libro colma una lacuna esistente nella letteratura scientifica. Mentre alcuni rami delle matematiche contano molti — anche troppi! — trattati, la teoria delle serie non è stata mai, o almeno assai di rado, ritenuta degna di formare oggetto di un'opera a sè; tra le poche eccezioni possiamo citare il *Traité élémentaire des séries* di E. Catalan (Paris, 1860) e le *Leçons sur les séries à termes positifs* di E. Borel (Paris, 1902), il primo ormai vecchio, le seconde piuttosto un'opera originale che un vero trattato. Quando aggiungeremo che il libro è redatto con ordine, chiarezza e rigore e col sussidio delle più recenti ricerche, avremo detto quanto basta per far comprendere come esso ben meriti una lieta accoglienza fra i cultori dell'analisi.

L'opera si divide in tre parti.

Nella parte I, stabilito il concetto di numero irrazionale, si svolge la teoria delle successioni (numerabili) di numeri reali; si introducono poi i numeri complessi e le successioni con essi formate, e si fa l'applicazione dei risultati ottenuti alle funzioni trascendenti più elementari; infine si studiano le successioni doppie.

La parte II è dedicata alle serie a termini costanti. Dopo le prime nozioni generali e lo studio di alcuni esempi classici, si passa all'esposizione dei criteri elementari di convergenza e di divergenza. Segue la teoria della moltiplicazione delle serie, e quella della loro trasformazione allo scopo di raggiungere una convergenza più rapida. Dopo ciò l'autore, seguendo le tracce

Digitized by Google

di Pringsheim, tratta delle forme tipiche delle serie a termini positivi convergenti e di quelle divergenti, e dei criteri più generali di convergenza e di divergenza. Gli ultimi capitoli riguardano i prodotti infiniti, le frazioni continue e le serie doppie.

Finalmente la parte III tratta delle serie a termini variabili. Premesse alcune nozioni sugli aggregati di numeri, si introducono i concetti di funzione, di continuità e di convergenza uniforme, e se ne fa l'applicazione alle serie trigonometriche, alle serie di potenze, alle serie di Dirichlet, ed alle serie di facoltà e di coefficienti binomiali.

Quasi ogni paragrafo è corredato da interessanti esercizi proposti al lettore, che raggiungono in tutto la bella cifra di 210.

Alcune osservazioni di poco conto.

Sembra a noi che, se l'autore avesse introdotto sin da principio il concetto di aggregato di numeri, avrebbe evitato la necessità di ripetere certe definizioni e certe dimostrazioni, prima per le successioni, poi per gli aggregati. Non comprendiamo poi perchè egli chiami *abgeschlossen* un insieme limitato, mentre questa parola ha nella teoria degli aggregati un significato ben diverso. Avremmo inoltre desiderato che, trattando della convergenza uniforme, l'autore avesse anche definito il concetto di *convergenza quasi uniforme* introdotto, sotto altro nome, da Arzelà, e ridotto a forma semplicissima da Borel *(Leçons sur les fonctions de variables réelles,* Paris, 1905, p. 41); ciò gli avrebbe permesso di stabilire in poche parole, seguendo quest'ultimo autore, la condizione necessaria e sufficiente per la continuità d'una serie di funzioni continue.

G. Vivanti

P. Montel. — *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe.* Paris, Gauthier-Villars, 1910. 8.° pag. VII+128. (Prezzo fr. 3. 50).

Questa monografia ha lo stesso carattere delle altre appartenenti alla pregevolissima collezione iniziata e diretta da E. Borel: lavori più soggettivi che oggettivi, dove l'autore non si sente obbligato ad enumerare tutto quanto si conosce sull'argomento scelto, ma espone soltanto ciò che tocca più dappresso il campo e l'indirizzo delle sue ricerche personali, e lo espone nella forma in cui più chiaramente si presenta al suo pensiero sotto la luce degli studi propri. Essa può considerarsi, in un certo senso, come un complemento delle *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en série de polynomes* di Borel (Paris, Gauthier-Villars, 1905), dove la questione è trattata per il caso

Digitized by Google

di variabili reali; ma ognuno sa come l'introduzione dell'ipotesi di una variabile affatto libera porti con sè diversità notevole di concetti e di procedimenti. Ed infatti l'autore trova necessario dedicare anzitutto un lungo capitolo (Cap. 1) alle generalità sulle funzioni analitiche; qui egli richiama i concetti di campo, insieme, funzione analitica, punto singolare, residuo, continuazione analitica, rappresentazione conforme; tratta delle serie di funzioni analitiche e in particolare delle serie di polinomi, e stabilisce i teoremi di Hadamard e di Hurwitz intorno alle singolarità di una funzione dipendente in modo noto da due altre. Nel Cap. 2 egli espone i metodi di sviluppo d'una funzione olomorfa in serie di polinomi fondati sull'applicazione dell'integrale di Cauchy: quelli di Painlevé, Hilbert, Runge, Appell, Cebicef-Tonelli; e mette in rilievo la connessione del metodo di Hilbert colla formola d'interpolazione di Lagrange. Alquanto diverso è il metodo di Faber, esposto nel Cap. 3. Qui si parte dalla osservazione, che per un campo circolare uno sviluppo semplicissimo in serie di polinomi è dato dalla formola di Taylor, e, facendo uso della rappresentazione conforme, si ottiene uno sviluppo:

$$a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \ldots\ldots,$$

dove i polinomi $P_1(x), P_2(x), \ldots$ dipendono soltanto dal campo, e le costanti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dipendono soltanto dalla funzione proposta. Un caso particolare è lo sviluppo in serie di funzioni sferiche in un campo ellittico. Il Cap. 4 è dedicato alla questione dell'esistenza di serie di polinomi convergenti in campi separati e rappresentanti in questi funzioni analitiche diverse. Infine nel Cap. 5 si considerano le serie di funzioni analitiche dal punto di vista della continuità e della analiticità della loro somma; il primo punto, come è noto, fu già esaurito da Arzelà, sull'altro può dirsi soltanto che la convergenza quasi uniforme è condizione necessaria per l'analisicità della somma della serie. L'ultima parte del capitolo riguarda i punti di convergenza irregolare, per i quali cioè non può assegnarsi un intorno in cui la serie sia equiconvergente; essi godono di una proprietà analoga a quella che costituisce il teorema di Picard.

Non dubitiamo che questo libro, interessante per il soggetto ed attraente per la forma, troverà la stessa fortuna che hanno avuto le altre monografie della importante collezione.

G. Vivanti

Digitized by Google

J. A. Fuët — *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.* Deuxième édition entierement refondue. T. I. *Les fonctions analytiques en général.* Paris, Gauther-Villars, 1907. 8.° XIII+112 p. T. II. *Les fonctions algébriques. Les série simples et multiples. Les intégrales.* Paris, Gauthier-Villars, 1910. 8.° XI+265 p. (Prezzo fr. 3. 50+9).

Del primo volume della 1.ª edizione parlammo già nel *Bollettino* (T. VI, 1903, p. 90-92). Il contenuto di esso, tolto il capitolo sulla continuazione analitica, occupa i due volumi che abbiamo dinanzi. La distribuzione della materia è mantenuta, ma l' esposizione è notevolmente ampliata. Fra le parti che hanno ricevuto un maggiore sviluppo citiamo la teoria delle funzioni non derivabili e, in generale, delle funzioni di variabili reali, la teoria degli aggregati, il capitolo sugli integrali complessi, e quello sulle serie di potenze a più variabili.

G. Vivanti

Funzioni ellittiche.

K. Boehm. — *Elliptische Funktionen.* I. Teil: *Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrucken entwickelt.* Mit 11 Figuren in Text. (Sammlung Schubert XXX). Leipzig, Goeschen, 1908. 8° p. XII + 354 (Prezzo Mk. 8.60). I. Teil: *Theorie der elliptischen Integrale. Umkehrproblem.* Mit 28 Figuren im Text. (Sammlung Schubert LXI) Leipzig, Goschen, 1910, 8.° p. VII+180. (Prezzo Mk. 5).

Una raccolta come quella che porta il nome di H. Schubert non poteva non contenere una trattazione della teoria delle funzioni ellittiche; l' ha somministrata il Prof. Boehm dell'Università di Heidelberg, il quale anzi, dopo lunghi studi sopra la letteratura dell' argomento, decise di presentarla sotto due forme fra loro indipendenti; in una delle quali essa appare come corollario di ricerche astratte sopra certe espressioni analitiche, nell' altra come prodotto dell' inversione degli integrali ellittici. L' ordine storico avrebbe consigliato di assegnare a questa il primo posto; ma l'A. giudicò preferibile invece attenersi al sistema opposto. Senza discutere questa deliberazione, esporremo brevemente il contenuto di ciascuno dei volumi che ci stanno sott' occhio, dopo aver detto che, per sua dichiarazione, l' A. ha largamento attinto alle *Nouvelles leçons sur l'analyse infinitésimale* del Méray.

Digitized by Google

Parte I.

In un Capitolo introduttorio l'A. stabilisce la distinzione degli insiemi numerabili in « einstrahlig » und « zweistrahlig », secondochè i loro elementi si possono considerare come funzioni di un indice variabile da 0 a infinito o dall' infinito negativo all' infinito positivo. Nei due capitoli seguenti studia delle serie e dei prodotti infiniti in due sensi e nel IV si serve delle proposizioni stabilite per gettare le basi di una teoria generale delle funzioni semplicemente periodiche. L'A., dopo questi capitoli di natura propedeutica, si volge al proprio tema, studiando alcune somme ed alcuni prodotti doppiamente infiniti, che guidano tosto alla definizioni delle note funzioni p, ς, σ. Egli intercala poi alcune considerazioni aritmetiche ausiliarie (Cap. VII), le quali lo abilitano a stabilire nel Capitolo successivo le prime proprietà delle funzioni ellittiche; tema questo che, ulteriormente svolto, guida nel Cap. seguente a nuove rappresentazioni analitiche e a nuove proprietà delle stesse funzioni. Gli ultimi tre Capitoli trattano rispettivamente di funzioni ellittiche di II e III specie, delle funzioni di Weierstrass e finalmente di quelle di Jacchi, e contengono quanto di essenziale che si può dire al riguardo.

Tutta l' esposizione riveste un carattere puramente teorico, perchè non contiene nemmeno una delle molteplici applicazioni che ricevettero le funzioni ellittiche e che valgono a stabilirne l' importanza agli occhi dei principianti.

Parte II.

Anche questa seconda parte ha un carattere esclusivamente analitico. L'A. prende le mosse dallo studio e dalla riduzione degli integrali iperellittici di genere qualsivoglia, per dedurre dai risultati ottenuti, come semplici corollari tutto ciò che si riferisce agli integrali ellittici. Questi vengono poi accuratamente investigati col mezzo di una opportuna superficie di Riemann, nel caso in cui siano di prima specie. L'A. passa poi all' inversione di un siffatto integrale, arrestandosi con la debita larghezza sul caso in cui i due punti di diramazione siano reali. Il seguente (V) Cap. è consacrato alle varie forme normali (secondo Legendre e Weierstrass) d' un integrale ellittico di I specie; mentre nell' ultimo si trova esposto il teorema di Abel « monumentum aere perennius ». Chiude l' opera la dimostrazione delle formole mediante cui si possano esprimere con funzioni ellittiche le coordinate dei punti di una curva del genere 2.

Digitized by Google

Notizie.

TEMA PROPOSTO DALLA SOCIETÀ OLANDESE DELLE SCIENZE DI HAARLEM: « Determinare i numeri primi p soddisfacenti alla congruenza $g^{p-1}-1=0$ (mod. p^{α}) ove g e a sono numeri primi dati e $a > 1''$ ».

Premio una medaglia d'oro e 150 fiorini. — I lavori dei concorrenti devono essere scritti in Olandese, Francese, Latino, Inglese, *Italiano* o Tedesco, ed essere spediti anonimi, prima del 1.° Gennaio 1912, al segretario di quella Società D.r J. P. Lotsy ad Haarlem.

IL PRIMO CENTENARIO DI UNA GRANDE CASA EDITRICE. — Il 3 Marzo del corrente anno grandi feste vennero fatte a Lipsia per ricordare il centesimo anniversario della fondazione della Casa editrice B. G. Teubner. In tale occasione venne pubblicato un sontuoso volume dal titolo *B. G. Teubner 1831-1911, Geschichte der Firma. In deren Auftrag herausgegeben von* FRIEDRICH SCHULZE, nel quale sono fedelmente narrate tutte le fasi per le quali è passata questa possente Casa, dall'epoca in cui Benedikt Gotthelf Teubner fondò una modesta tipografia propria, al giorno d'oggi. Chi conosce l'enorme quantità di pubblicazioni di ogni genere, ma specialmente filologiche e matematiche, che videro la luce per opera e spesso per merito di tale Casa, riconoscerà come poche possono competere con essa per slancio impresso allo svolgimento del pensiero umano e si associerà a noi nello esprimere i sentimenti di riconoscenza per quanto essa operò in passato e gli auguri perchè tale azione sommamente benefica venga proseguita ed ulteriormente svolta in avvenire. In un periodico bibliografico e storico quale è il nostro non può non essere anche rilevato come il volume giubilare or ora uscito contenga un grande numero di riproduzioni di autografi e ritratti di personalità scientifiche di primo ordine, nonchè parecchi dati interessanti relativi allo sviluppo storico delle scienze esatte in quest'ultimo mezzo secolo.

Non è questa l'unica pubblicazione fatta per commemorare degnamente quella fausta ricorrenza Infatti il Prof. Felix Müller ha in tale occasione stampato un curioso opuscolo *(Der mathematische Sternhimmel des Jahres 1811. Festschrift zur Feier des hundertjarigen Besthens des Firma B. G. Teubner)*, nel quale sono enumerate tutte le personalità matematiche che vivevano nell'anno in cui quella Casa venne fondata, sia quelle la cui fama era sin d'allora già assicurata, sia quelle che cominciavano allora ad affermarsi, sia anche quelle che ancora appena visibili; naturalmente le più numerose sono quelle

Digitized by Google

della seconda specie, che l'autore ripartisce in tre gruppi, uno relativo alla Germania, il secondo alla Francia ed il terzo agli altri paesi.

D'altronde la medesima Casa ha dato alla luce un artistico fascicolo *(Die Hundertjahrfeier der Firma B. G. Teubner-Leipzig 3 und 4 März)* nel quale sono riprodotti gl'indirizzi gratulatori inviati ed i discorsi pronunciati in quell'occasione: a render più vaga ed interessante tale pubblicazione, venne ornata di parecchie bellissime illustrazioni; essa prova ad evidenza quanto larga e cordiale sia stata la partecipazione del mondo dei pensatori a quella solennità.

—

Un consiglio va dato a tutti coloro che intendono concorrere al premio di centomila Marchi promesso dal defunto D.r Wolfskehl a chi dimostrerà il « grande » teorema di Fermat (cfr. *Bollettino XI,* p. 92); quello, cioè, di studiare la memoria storica di Benno Lind *Ueber das letzte Fermatsche Theorem* (Abh. zur Gesch. der Math., XXVI Heft, 1910), ove sono elencate ed analizzate tutte le ricerche sopra l'argomento, a partire da Eulero sino ad oggi; memoria assai istruttiva anche perchè fa toccar con mano quale sperpero di tempo e di forze provenga dal fatto che molti si accingono a ricerche originali sopra un dato soggetto senza curarsi di prender notizia del punto a cui pervennero i loro predecessori.

—

Il V Congresso Internazionale dei Matematici avrà luogo a Cambridge nei giorni 22-28 Agosto 1912. Comprenderà quattro Sezioni, cioè: I. *Aritmetica, Algebra, Analisi.* II. *Geometria.* III. *Meccanica, Fisica matematica, Matematica applicata.* IV. *Questioni filosofiche. storiche e didattiche.* Il Comitato organizzatore è composto come segue: G. H. Darwin, *presideate;* J. Larmor, *tesoriere,* E. W. Hobson e A. E. H. Love *segretari generali;* H. F. Baker e A. Berry, *membri.* La tassa di inscrizione al congresso è di una lira sterlina; i membri delle famiglie dei congressisti pagheranno 12 scellini ciascuno. Per ulteriori informazioni rivolgersi al Prof. E. W. Hobson, Christ's College, Cambridge.

—

Tema d'Astronomia proposto dall'Accademia di Danimarca — Gli *Adversaria* di O. Römer di recente pubblicati dall'Accademia danese contengono, fra l'altro, una serie di ricerche e di calcoli di astronomia. La denominazione di « minuta » datavi dall'autore stesso, indica già che queste note furon scritte in circostanze diverse, in epoche differenti e sopratutto per suo uso personale e che in conseguenza non sono sempre esenti da negligenze grafiche o da altri errori accidentali, non meno che

Digitized by Google

da discordanze; anche altre ragioni le rendono talvolta un po' oscure sopratutto per dei lettori moderni. Sarebbe interessante il paragonare tali note con tutto quanto si conosce per altra via sopra il Röner e più generalmente sull' astronomia della sua epoca. Perciò l'Accademia propone di conferire una Medaglia d' Oro a chi svolgerà il seguente soggetto: *Spiegare le note astronomiche contenute negli « Adversaria » di O. Römer; collegarle a quanto si conosce da altra fonte sull' opera scientifica del Römer e sullo stato dell'astronomia al suo tempo* ».

Le risposte devono essere inviate anonime al Prof. G. H. Zeuthen entro il 31 Ottobre 1912; possono essere scritte in danese-norvegese, svedese, inglese, tedesco, francese o latino ».

Concorso a Premio per le Matematiche. — La Classe di Scienze Fisiche della R. Accademia di Bologna, a richiesta del Sig. Cav. Adolfo Marlani, mette a concorso il seguente tema:

« *Esporre, con metodo storico-critico, lo sviluppo organico della teoria delle funzioni ellittiche ed i vari punti di vista sotto ai quali questa teoria è stata considerata dalla fine del secolo XVIII (1) fino ai nostri giorni. Indicare l' influenza che hanno avuto, su altri rami dell' analisi, le vedute presentatesi successivamente nella nominata teoria* ».

A chi presenterà, per giudizio dell' Accademia, il miglior lavoro, il Cav. Dott. Adolfo Marlani corrisponderà la somma di L. 500, quale contributo alle spese per il compimento del lavoro stesso.

Il concorso si chiude il 31 Dicembre 1912.

Tema proposto dalla R. Accademia di Madrid: « *Studio geometrico della polarità fra due figure, del piano e della stella, di ordine superiore al secondo* »; nello svolgere questo tema non si debbono ammettere altri postulati oltre quelli che stanno a fondamento della geometria; si dovrà aggiungere un'Appendice in cui siano confermati con procedimenti algebrici i risultati ottenuti nella Memoria.

Premio una Medaglia d' oro e 1500 Pesetas. Scadenza 31 Dicembre 1912.

Concorso bandito dalla R. Accademia del Belgio. — *Esporre e completare le investigazioni sopra il Calcolo delle Variazioni fatte a partire dal 1850.*

Premio L. 1000. Scadenza 1.° Agosto 1912.

---

(1) Perchè mai la dotta Accademia ha creduto di escludere i lavori del Fagnano, che risalgono alla prima metà del Secolo XVIII e che hanno l' incontrastato ed incontrastabile merito di avere schiuso ai geometri un campo di ricerche totalmente nuove e straordinariamente feconde ?

Digitized by Google

RECENTISSIME PUBBLICAZIONI

in vendita presso la

Libreria Internazionale ROSENBERG & SELLIER

TORINO — Via Maria Vittoria, 18

Baker A. L. — Quaternions as the Result of Algebraic Operations. L. 8.75.

Ball Rouse W. W. — Ricreazioni e problemi matematici dei tempi antichi e moderni. Versione dall'inglese pel Dr. Dion. Gambioli. 398 pag. 1911. L. 10.

Barbieri A. — Poligonazione tacheometrica: norme pratiche per il rilevamento planimetrico delle poligonali e per il loro calcolo. 230 pag. 1910. L. 3.50.

Beltrami E — Opere matematiche pubblicate per cura della facoltà di scienze della R. Università di Roma. Vol. I 1902. -- Vol. II 1904. — Vol, III 1911. Ogni vol. L. 25.

Berzolari L. — Geometria analitica. Parte I: Il metodo delle coordinate. 409 pag. 1911. L. 3.

Böninger M. H. — Beweis des letzten Fermat'schen Satzes. L. 3.

Bouasse H. — Cours de mathématiques générales. Spècialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs. 323 pag. ill. 1911. L. 20.

Bricard R. — Géométrie descriptive 1911 (avec 107 fig.) L. 5.

Capelli A. — Istituzioni di analisi algebrica. 4.ª ediz. notevolmente ampliata. 953 pag. 1910. L. 17.

Dingler H. — Die Grundlagen der angerwandten Geometrie. Eine Untersuchung über d. Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften. 1910. Lire 7.

Dumont E. -- Grandeurs et nombres. Arithmétique générale. Nombres naturels, qualifiés, complexes, ternions et quaternions. 1911. L. 10.

Eibenbaum C. — Die Gleichung des Pythagoras in der Einschränkung des Fermat. Eine umfassende Lösung. 1910. L. 4.

Fano G. — Lezioni di geometria descrittiva, date nel Politecnico di Torino. 426 pag., con 121 tavole. 1910. L. 16.

Foth R. — Anfangsgründe der Zahlen-u. Raumgrössenlehre. 6. Auflage gebunden. L. 5.50.

Fueter R. — Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation u. ihr Einfluss auf die Entwicklung der Zahlentheorie. Lire 2.25.

Grundlehren der Mathematik. I: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. I, Band: Färber, Arithmetik, gebunden L. 12.50.

Guarrera V. — La trisezione dell'angolo. 1909. L. 5.

Hammer E. — Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie. I. Band: Feldmessen und Nivellieren, des Lehrbuchs für Vermessungskunde, besonders f. Baningenieure. Lire 30.

Henneberg L. — Die graphische Statik der starren Systeme. Neue Auflage. Gebunden. Lire 32.

Howe G. — Mathematics for the practical man. L. 7.50.

Jacob L. — Le calcul méchanique. Appareils arithmètiques et algébriques. Intégrateurs. 1911. L. 5.

Jahrbuch der Mathematik 39. Baud (1907).
1. Heft
2. »
3. Schluss-Heft » 18.50

L. 34.50

Klein F. — Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. I. Teil: Arithmetik, Algebra, Analysis, 2. Auflage. Lire 10.

Digitized by Google

Klingelhöffer R. — Der Fermat'sche Satz. Lire 3.

Kneser — Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Lire 8.50.

Kühtmann's Rechentafeln. Ein handl. Zahlenwerk mit 2 Millionen Lösungen, die alles Multiplizieren und Dividieren ersparen und selbst die grössten Rechnungen dieser Art in wenigen Additions — u. Subtraktionszahlen auflösen. Nebst Tafeln. der Quadrat-und Kubikzahlen von 1-1000. geb. in Leinw. Lire 24.

Lazzeri G. e Bassani A., — Elemente der Geometrie (Aus d. italienischen von P. Trentlein) gebundem. Lire 18.50.

Loria G., — Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. 2. Auflage. 2. Band: Die transzendenten und die abgeleiteten Kurven mit 80 Figuren auf 6 lithograph. Tafeln. Lire 17.

Macmahon P. A. — Memoir on the theorie of the Partition of Numbers. Pt. 5: Partitions in twodimensional space. Lire 3.

Mathematical Questions and Solutions. Vol. 18. New Series. Lire 9.50.

Mercer F., — Sturm-Lionville-Series of Normal Functions in the theorie of Integral Equations. Lire 6.

Montessus R. de et **R. d'Adhémar**, Calcul numérique. Opérations arithmétiques et algébriques. Intégrations. 1911. Lire 5.

Müller A. — Galileo Galilei: Studio storico scientifico. Traduz. del Dr. P. Perciballi, con prefaz. del Card. P. Maffi, e lettera del Sen. G. Schiaparelli. 522 pag. 1911. Lire 10.

Nachtergal A., — Calcul des moments d'inertie, à l'usage des ingenieurs, architectes, dessinateurs et élèves des écoles industrielles. Autographié. Contenant 102 fig. 1911. Lire 5.

Nielsen N. — Théorie des fonctions métasphériques. Cours professé à l'Université de Copenhague. 1911. Lire 12.

Oseen C. W. — Uber die Bedeutung der Integralgleichungen i. d. Theorie der Bewegung und reibenden unzusammendrückbaren Flüssigkeit. L. 1.50.

— — Uber eine in d. Theorie des Kreisels auftretende Familie von Flächen 6. Grades. Lire 1.50.

— — Uber die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydronamik. Lire 1.50.

Pagano Di Melito G. — Le rette di altezza ed altri calcoli di astronomia nautica. 47 pag., con 8 tavole. Lire 3.50.

Pes G., — Nuova navigazione astronomica. Le rette di posizione: teoria, applicazioni, tavole. 188 pag. in 4.° 1911. Lire 8.

Prasad G. — A Text-book of Integral Calculus with numerous worked examples. Lire 7.50.

Radon F., — Uber das Minimum des Integrals. Lire 2.75.

Salmoiraghi A. — Guida pratica del geometra moderno. 120 pag. con tavola. 1910. Lire 10.

Scheffers G., — Lehrbuch der Mathematik fur Studierende der Naturwissenschaften u. d. Technik. Einführung in die Differential-und Integralrechnung un die analytische Geometrie 2. Aufe. Lire 24.

Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft. 9. Iahrgang. Lire 5.

Sommer I., — Introduction à la théorie des nombres algébriques. Edition française revue et augmentée. Traduit de l'Allemand par A. Lévy. 1911. Lire 15.

Steécz G. — Der « grosse Satz » Fermats, ohne Kongruenzen bewiesen. Lire 5.75.

Genova — Tipografia FRATELLI CARLINI fu G. B.

Digitized by Google

11.394

(Conto corrente colla Posta)

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO XIII

1911

TORINO

ROSENBERG & SELLIER

Via Maria Vittoria, 18

1911

Digitized by Google

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XIII — Luglio-Settembre e Ottobre-Dicembre — 1911

P. Ruffini ed il così detto " Metodo di Horner „

di Florian Cajori (1).

Prima del secolo XIX non si conosceva alcun metodo semplice, pratico, elementare per calcolare i coefficienti di un'equazione le cui radici differissero per una determinata costante dalle radici di una data equazione algebrica numerica $f(x) = 0$. Un procedimento siffatto fu inventato negli inizi del secolo scorso ed è contenuto nel così detto « metodo di approssimazione di Horner ».

La storia del metodo di Horner, per quanto concerne il suo svolgimento in Inghilterra, fu scritta con ogni particolare da Augusto de Morgan (2). Egli attinse largamente a fonti originali e mostrò che, tra i rivali inglesi di Horner (fra cui si trovavano Teofilo Holdred, Pietro Nicholson e Enrico Atkinson), nessuno, eccettuato forse Nicholson, presentò dei metodi di approssimazione comparabili a quello di Horner, e nessuno poteva accampare dei diritti di priorità in confronto dell'Horner. È noto che la popolarità conseguita in Inghilterra dal metodo di Horner è dovuta al de Morgan ed a J. R. Young. Se fossero mancati gli sforzi di questi uomini, la memoria pubblicata dall'Horner nella *Philosophical Transactions* del 1819 sarebbe stata perduta di vista e dimenticata. De Morgan era entusiasta del metodo di Horner. Lo insegnava con grande impegno e derideva

(1) Traduzione autorizzata di un articolo inserito nel Fascicolo di Giugno 1911 del *Bulletin of the American mathematical Sociey* La tesi ivi sostenuta venne enunciata già da tempo da G. BELLAVITIS; il fatto che se ne fece indipendentemente fautore un distinto storico americano, ne aumenta la verosomiglianza, perchè fa scomparire ogni sospetto che dessa sia il riflesso di un sentimento di orgoglio nazionale (G. L.).

(2) *Companion to the (British) Almanac for 1839.* Art. « Notices of the progress of the problem of evolution » p. 34-52.

Digitized by Google

gli insegnanti di Cambridge che non lo avevano famigliare (1). La preparazione della succitata memoria storica fu evidentemente un frutto dell' amore. Essa, ancora oggi, è la fonte classica intorno alle prime ricerche sopra quell'argomento. Ma de Morgan non ha mai neppur lontanamente sospettato che Horner avesse un rivale assai serio fuori dell' Inghilterra (2).

Scopo della presente memoria è di mostrare che quindici anni prima della pubblicazione della prima memoria di Horner (3) un metodo pressochè identico era stato pubblicato in Italia da Paolo Ruffini, il cui nome è di consueto associato alla dimostrazione dell' impossibilità di risolvere algebricamente le equazioni di quinto grado. Ruffini non trovò alcun J. R. Young od alcun de Morgan che richiamasse il pubblico matematico sopra la importanza del suo metodo di approssimazione. Quel metodo fu trascurato ed ora soltanto, alla distanza di un secolo, comincia il grave processo per restituire il mal tolto.

Nel 1802 la Società Italiana delle Scienze (dei XL) propose di conferire una Medaglia d' Oro al miglior metodo per determinare le radici di un' equazione numerica di grado qualunque. Cinque memorie si presentarono all' arringo e nel 1804 la medaglia venne conferita a Paolo Ruffini. La dissertazione vincitrice fu pubblicata dalla Società; è una ponderosa memoria di 175 pagine in 4.° grande, portante il seguente titolo:

Sopra la determinazione delle radici delle equazioni numeriche di qualunque grado. Memoria del Dottor Paolo Ruffini, *pubblico professore di matematica sublime in Modena, uno dei Quaranta della Società Italiana delle Scienze, ecc. Coronata dalla Società medesima.* In Modena, MDCCCIV. Presso la Società Tipografica. Con approvazione.

Ruffini scrisse sopra le approssimazioni di nuovo nel 1807 (4)

(1) A. De Morgan, *A budget of paradoxes* (London, 1872) p. 292-375.

(2) Id. p. 275.

(3) Horner scrisse tre importanti memorie sopra il suo metodo di approssimazione, cioè:

I. *A new method of solving numerical equations of all orders, by continuous approximations* (Philosophical Transactions; London, 1819 Part I, p. 308-334).

II. Un articolo in *Leybourn's Mathematical Repository* (Vol. 5, Parte 2, N. 19; London, 1830) del quale alcuni estratti furono inseriti in J. R. Young *Theory and Solution of algebraic equations* (London, 1843) p. 474-5.

III. *On algebraic transformations* (The Mathematicians, Vol. I, London, 1845, p. 109).

(4) *Algebra elementare* del Dottor Paolo Ruffini (Modena, MDCCCVII) Cap, IV e V ed *Appendice*, che non si trova nella copia dell'algebra da me posseduta e che sembra essere stata rilegata separatamente e pubblicata nel 1808.

Digitized by Google

e nel 1813 (1). In questi scritti posteriori egli diede una esposizione semplificata del suo metodo e ne spiegò l'applicazione all'estrazione delle radici dei numeri.

Quantunque Horner non conoscesse le pubblicazioni di Ruffini sopra l'approssimazione delle radici delle equazioni, pure le memorie di Horner del 1819 e del 1845 contengono alcuni interessanti punti di contatto con le pubblicazioni di Ruffini degli anni 1804, 1807 e 1813.

Nelle loro prime pubblicazioni entrambi i citati autori, nell'esporre i loro metodi, si servono del calcolo differenziale; Ruffini usa le derivate ordinarie, mentre Horner adopera le derivate di Arbogast.

Invece nelle loro pubblicazioni posteriori ambedue dànno delle esposizioni più semplici dei loro metodi, prescindendo dal calcolo differenziale e ricorrendo soltanto all'algebra ordinaria. L'esposizione semplificata di Ruffini apparve nel 1807 e nel 1813; invece quella di Horner nel 1845, in un lavoro postumo (2).

L'uno e l'altro fanno notare che i loro metodi possono venire vantaggiosamente adoperati per estrarre le radici dai numeri. Ruffini insiste sopra questo punto più di Horner; ed in realtà le pubblicazioni di Ruffini degli anni 1807 e 1813 considerano il metodo esclusivamente da tale punto di vista. Nè l'uno nè l'altro si occuparono di estendere il metodo di approssimazione alla ricerca delle radici complesse.

Un divario fra i due autori sta nel fatto che Horner nel 1819 riteneva erroneamente che il suo metodo fosse senz'altro applicabile ad equazioni irrazionali e trascendenti. Infatti egli scrive: « Dalla natura generale delle notazioni adoperate risulta evidente che dalle nostre considerazioni non è esclusa alcuna classe di equazioni, finite, irrazionali e trascendenti (3) ». Ma

(1) *Di un nuovo metodo generale di estrarre le radici numeriche.* Memoria del Signor Cav. Paolo Ruffini (Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze. Tomo XVI, Parte I, Verona MDCCCXIII p. 373-429; Tomo XVII, Parte contenente le memorie di matematica, p. 1-15.

(2) Questo articolo del 1845 fu letto alla Società Reale il 19 Giugno 1823, ma (come dice T. S. Davies nella nota introduttoria alla memoria stampata) ne venne rifiutata la pubblicazione nelle *Philosophical Transactions,* anche dopo che era stato considerevolmente abbreviato. Horner disse più volte a Davies che furono sollevate molte difficoltà contro l'inserzione della sua prima memoria nelle *Philosophical Transactions.* « Il carattere elementare del tema » dice Davies, « era l'obbiezione addotta; il modo recondito di trattarlo, fu il passaporto presentato per la sua ammissione », Nel terzo articolo di Horner vi è una semplificazione dei principî del suo procedimento. In tale articolo egli dice di Budan: « fui soddisfatto trovando che egli non aveva anticipata la mia scoperta ».

(3) *Philosophical Transactions,* 1819, Part I, pp. 217-318.

Digitized by Google

egli non addusse alcuna altra ragione o soluzione illustrativa di equazioni irrazionali o trascendenti a sostegno della sua asserzione. Ruffini invece limitò la sua discussione ad equazioni algebriche, razionali, intere

Un secondo punto di disaccordo sta in ciò, che Horner nella sua memoria del 1830 espone accuratamente una forma speciale del suo metodo, mediante cui si possono separare con sicurezza due radici approssimativamente eguali. Invece Ruffini non si occupò mai di tale perfezionamento del suo metodo.

Per dare un'idea del metodo di approssimazione di Ruffini trascriveremo le pagine 22-25 della sua memoria del 1804. La equazione (A), citata nel brano seguente, è la seguente:

$$(A) \qquad Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{ec.} + Sx^2 + Tx + V = 0$$

« Supposto $x = p + y$, determinare un modo spedito, onde trasformare l'Equazione (A) in un'altra con l'incognita y.

« Dalle proprietà delle trasformate sappiamo, che, essendo Z il primo membro della (A) (n.° 1), la trasformata richiesta si ottiene ponendo p in luogo di x nella

$$Z + \frac{dZ}{dx}y + \frac{ddZ}{2dy^2}y^2 + \frac{d^3Z}{2.3dx^3}y^3 + \text{ec.} + Ay^m = 0$$

Ora pel (n.° 10) nella ipotesi di $x = p$ abbiamo $Z = P^{(m+1)}$, e quindi

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{dP^{(m+1)}}{dp} = Q^{(m)} \text{ (n.° 8)}, \quad \frac{ddZ}{2dx^2} = \frac{dQ^{(m)}}{2dp} = R^{(m-1)},$$

$$\frac{d^3Z}{2.3dx^3} = \frac{dR^{(m-1)}}{3dp} = S^{(m-2)}, \text{ ec.}$$

Dunque queste quantità P, Q, R, S, ec. altro non sono che i coefficienti della Equazione in y, ed essa sarà perciò la seguente

$$(F) \quad P^{(m+1)} + Q^{(m)}y + R^{(m-1)}y^2 + S^{(m-2)}y^3 + \text{ec.} + Ay^m = 0$$

« Ciò essendo, per isciogliere il nostro Problema, altro non dovremo, che determinare speditamente le quantità $P^{(m+1)}$, $Q^{(m)}$, $R^{(m-1)}$, $S^{(m-2)}$, ec.

« A tal fine disposti in (IV) i coefficienti della (A) nel

Digitized by Google

modo istesso del (I) (n.° 9), e determinata nella maniera medesima tutte le quantità A, P'', P''', ec. $P^{(m+1)}$, colloco in una terza riga sotto della P'' il coefficiente A, moltiplico questo per p, sommo il prodotto $Ap = Q' p$ (2°. n.° 8) col sovrapposto P'', e il risultato $Q'p + P''$, essendo pel cit.° (2° n.° 8) $= Q''$, si ponga nella terza linea sotto del termine P'''. Si moltiplichi questo Q'' per p, si unisca con P''', e pongasi sotto del P^{IV} il risultato $Q''p + P''' = Q'''$ (2° n.° 8). Proseguendo così ad operare, otterremo sotto del $P^{(m+1)}$ il risultato $Q^{(m)}$ ...

(IV)

A,	B,	C,	D,	E,	F,	ec.	V,
	A,	P'',	P''',	P^{IV},	P^{V},	ec.	$P^{(m)}$, $P^{(m+1)}$,
		A,	Q'',	Q''',	Q^{IV},	ec.	$Q^{(m-1)}$, $Q^{(m)}$,
			A,	R'',	R''',	ec.	$R^{(m-2)}$, $R^{(m-1)}$,
				A,	S'',	ec.	$S^{(m-3)}$, $S^{(m-2)}$,
					A,	ec.	$T^{(m-4)}$, $T^{(m-3)}$,
						ec.	

« Nell' ultima (m + 1) esimà colonna verticale contenendosi i valori dei coefficienti della (F), li sostituisco nella (F) medesima, e per tal guisa otterremo la trasformata richiesta con operazioni semplici, e facili ad eseguirsi come ognuno può agevolmente vedere da sè, e come apparisce dall' esempio seguente.

« Data la $4x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 8 = 0$, vogliasi trasformare in un' altra, nella quale sia $y = x - 6$. Opero nel modo esposto ora,

4,	— 6,	3,	— 5,	— 4,	8,	
	4,	18,	111,	661,	3962,	23780
		4,	42,	363,	2839,	20996
			4,	66,	759,	7393
				4,	90,	1299
					4,	4114
						4

e otterremo la trasformata

$$4y^5 + 114y^4 + 1299y^3 + 7393y^2 + 20996y + 23780 = 0 \text{ ».}$$

Da questo brano appare che l' algoritmo cercato da Ruffini è identico a quello che si usa nel consueto metodo di Horner. Ma la disposizione delle cifre è differente. I coefficienti della equazione trasformata si presentano secondo Ruffini nell' ultima colonna a destra, secondo Horner invece in una diagonale che

Digitized by Google

sale da sinistra verso destra. Non è evidente che una delle due disposizioni possegga una spiccata superiorità sull' altra. A pagine 77-79 Ruffini calcola con otto decimali la radice reale della equazione cubica di Newton $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Nel 1804 Ruffini elaborò il « metodo di Horner » per approssimare le radici delle equazioni numeriche con una chiarezza ed una profondità nemmeno superata dall' esposizione originale fattane da Horner nel 1819. In considerazione di questo fatto, non è giustizia storica richiedere che il nome di Ruffini sia associato a quello di Horner nella designazione di quel metodo? Perchè non chiamarlo « metodo di Ruffini-Horner » ?

Va anche notato quì che Budan, nella sua celebre memoria del 1807 (1), espose un procedimento per trasformare un' equazione in altra le cui radici fossero minori di h delle radici della data, il quale offre qualche somiglianza con quello Ruffini e Horner. Quando $h = 1$, il calcolo è identico. Ma se p. e., $h = 8$, vi è una differenza: Budan raggiunge lo scopo con otto passaggi, diminuendo le radici di un' unità per volta. Riguardo a Budan, Ruffini scrisse una volta a Delambre, segretario perpetuo dello Istituto di Francia (2).

« Troppo giuste sono le lodi che Ella dà al metodo del Sig. Budan di sciogliere le Equ. numeriche; avrei però desiderato che avesse Ella avuta occasione di vedere la Memoria che sopra lo stesso argomento presentai già alla nostra Società Italiana, che da essa riportò graziosamente il premio e che poi fu stampata nel 1804 fuori degli Atti. Coincido col Sig. Budan nella maniera di fare le trasformazioni successive e nel servirmi dei decimali ».

(1) F. D. Budan, *Nouvelle méthode pour la résolution des equations numériques* (Paris, 1807) pp. 14, 15, 29, 39.

(2) *Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)*, Serie III, Tomo XIV, 1906, p. 296.

Digitized by Google

Opere complete ed Enciclopedie.

J. J. Sylvester — *The collected mathematical Papers.* Vol. III (1870-1883). Cambridge, University Press 1909, 8.° gr. p. XV+688.

Mentre il precedente volume di questa collezione (cfr. *Bollettino*, XI, 1909, p. 12) porgeva un' idea dell' attività scientifica spiegata dall'A. nel mentre era Professore all' Accademia militare di Woolwich, nel presente sono raccolti i frutti delle ricerche da lui fatte nel mentre insegnava all'Università di Baltimora. La maggior parte degli ottantanove lavori in esso adunati concernono la teoria delle forme algebriche, teoria a cui egli fu costretto a dedicare tempo e fatiche non indifferenti per soddisfare il desiderio di alcuni suoi ascoltatori; origine analoga hanno le memorie relative alla teoria dei numeri, soggetto di cui è notorio il legame con la dottrina delle forme invariantive.

Alcuni dei lavori che leggonsi nel volume che annunciamo videro la luce la prima volta in raccolte americane pochissimo diffuse in Europa, onde per molti riusciranno affatto nuovi; del tutto nuovo è poi un interessante discorso tenuto dal Sylvester in America, mai stampato prima d' ora e che merita di essere segnalato a coloro cui punge vaghezza di conoscere le cause che portarono i grandi scienziati alle scoperte che li resero immortali.

Nell' impossibilità di entrare in una completa disamina di quanto contiene questo nuovo volume dell' importante raccolta delle opere del Sylvester, citiamo un'originale osservazione d'indole pratica che vi si legge (p. 476), sulla prerogativa goduta da un sistema ternario per denominare le monete, curiosa applicazione della matematica ad una questione pratica, che ricorda quella delle coordinate cartesiane che fece il Bellavitis, proponendo un metodo originale per numerare le case d' una città.

G. L.

Scritti di G. Vailati (1863-1909) 8.° gr. p. XXIX+772. Firenze 1911 (Prezzo L. 15).

Annunciamo con vera soddisfazione questo monumentale volume perchè, se vi è un caso in cui l'adunare in un tutto la produzione intellettuale di un pensatore si presentava quasi come una necessità, è quello offerto dal Vailati; giacchè essa è così varia

Digitized by Google

per indole e così dispersa per modo di pubblicazione, che neppure coloro i quali ebbero con lui antica e costante consuetudine potevano con fondamento asserire di conoscere nella sua totalità quanto gli uscì dalla penna.

Chi con la scorta della raccolta che ci sta sott' occhio esamina nel suo insieme tutta la produzione del compianto scienziato, non può non essere colpito dalla estrema varietà dei campi in cui essa si è esplicata, varietà, non nel senso che egli siasi *successivamente* dedicato a differenti discipline, ma nel senso che egli si interessò *contemporaneamente* (e non come spettatore passivo) alle più disparate ricerche: tale egli si manifestò nelle origini, tale rimase sino al termine della sua troppo breve carriera. A riprova di tale attitudine mentale sta una raccolta di recensioni, di una ricchezza e varietà forse senza esempio, nelle quali sono profuse osservazioni ingegnose e vedute originali, che ne rendono la lettura oltremodo dilettevole ed utile.

Prescindendo da questa collezione di scritti minori, nel volume in cui è compendiata la produzione del Vailati, si trova un buon numero di lavori sulla cui importanza devesi oggi ripetere il lusinghiero giudizio che fu pronunciato allorchè il loro apparire svelò all'Italia un nuovo astro che sorgeva; alludo alle memorie sopra la storia della meccanica ne' suoi primi stadi di sviluppo ed alle geniali prolusioni ad alcuni corsi liberi tenuti all'Università di Torino, le quali sono destinate a servir sempre di guida o di modelli a coloro che vogliono apprendere come si possano trarre utili ammaestramenti dalla storia della scienza.

Nè può mancare un cenno laudativo intorno alle osservazioni da lui fatte in molte occasioni sul disperante problema della classificazione delle scienze; e tanto meno sopra quelle, altrettanto acute, che si riferiscono all' etimologia dei termini in uso nel linguaggio scientifico, le quali vanno caldamente raccomandate agli insegnanti di matematica nelle scuole classiche, come quelle che offrono un ottimo mezzo per togliere le scienze esatte da quello stato di deplorevole isolamento, in cui si trovano quando si segua lo stecchito metodo di esposizione consacrato dagli Elementi di Euclide.

Il *Bollettino,* che annoverò il Vailati fra i suoi più autorevoli collaboratori, invia un voto di plauso ai Signori M. Calderoni, U. Ricci e G. Vacca che architettarono ed eseguirono questa edizione, ed al P. Premoli che vi ha premesso una affettuosa e profonda biografia.

G. L.

Digitized by Google

Funzioni ellittiche.

HARRIS HANCOCK — *Lectures on the Theory of Elliptic Functions.* Vol. I, *Analysis.* 8.° gr. p. XXIII+498. New York, J. Willey; London, Chapman e Hall. 1910,

L'A., un americano laureatosi tanto a Parigi quanto a Berlino, sembra con l'opera di cui oggi annunciamo il I volume, aver voluto rendere omaggio ai suoi maestri di Francia e di Germania, fondendo e coordinando in un tutto logico ed armonico le produzioni dovute a Hermite, Jacobi e Weierstrass e loro discepoli; per ciò e per la sua tendenza elevata la presente opera ha la propria ragione di esistere e non tarderà a conquistarsi un posto considerevole nella collezione, già tanto ricca, di opere sopra le funzioni ellittiche.

Essa si apre con un Capitolo introduttorio (il I) destinato a raccogliere alcune generalità sopra le funzioni razionali, elementari ed analitiche, che verranno spessissimo invocate in seguito.

I cap. II e III contengono delle ricerche generali il cui nocciolo può presentarsi come segue: Hermite ha osservato nella teoria delle funzioni di variabili complesse z, u, che, se l'equazione differenziale

$$(I)\quad f(z, z') = 0.$$

ove f designa una funzione razionale intera de' suoi argomenti, ammette un integrale ad un valore, allora z e z' possono esprimersi razionalmente in funzione di una variabile indipendente t purchè l'integrale sia una funzione o razionale o semplicemente periodica; ma, se l'integrale è una funzione biperiodica, Hermite dimostrò che z e z' possono esprimersi col mezzo di formole in cui non entra altra irrazionalità che la radice quadrata di un polinomio di quarto grado. D'altronde Weierstrass dimostrò che le tre categorie di funzioni testè menzionate possiedono tutte un teorema di addizione algebrico e da questo punto di vista trattò la teoria delle funzioni ellittiche e le altre due categorie di funzioni summenzionate come casi limiti. Finalmente Méray dimostrò che fra qualunque funzione biperiodica e la sua prima derivata passa una relazione algebrica del tipo (I), il che avviene anche per quelle altre due categorie di funzioni. Ne segue che l'esistenza dell'equazione (1) (che l'A. chiama *equazione eliminante)* è necessaria per l'esistenza delle tre anzidette specie di funzioni. Si aggiunga che dall'esistenza di una relazione algebrica tra $\varphi(u+v)$, $\varphi(u)$ e $\varphi(v)$ non segue che

Digitized by Google

φ (u) abbia un teorema di addizione algebrico; per ciò è ancora necessario esista l'equazione eliminante: donde una riprova dell'importanza di questa ed una giustificazione della parte fondamentale che le è fatto disimpegnare nel trattato che esaminiamo.

Nel Cap. IV di questo è dimostrata l'esistenza di funzioni biperiodiche ed è discussa la natura dei periodi; è pure stabilito che una funzione analitica uniforme non può avere più di due periodi fra loro indipendenti. Logicamente il passo che si deve poi compiere (costruzione di una funzione biperiodica) è fatto nel Cap. V, col mezzo delle celebri « funzioni intermedie » introdotte nella scienza da Hermite.

Nel Cap. VI viene introdotta la superficie di Riemann, che poi s'insegna a trasformare in semplicemente connessa; l'A. collega a ciò alcuni sviluppi sopra l'integrazione e la teoria dei residui, generalizzando un metodo di Hermite.

Nel Cap. VII l'A. riprende la considerazione dell'integrale già ottenuto dall'equazione eliminante nel Cap. V e si propone di determinare le condizioni affinchè il suo limite superiore Z sia una funzione univalente di u; così è condotto al *problema d'inversione;* che tratta in un modo semplicissimo servendosi delle superficie di Riemann; trova così z espressa come quoziente di due funzioni intermedie semplici (funzioni Θ). Applicando poi un bel teorema di Briot e Bouquet egli dimostra che qualsivoglia funzione analitica trascendente uniforme, la quale ammetta un teorema di addizione algebrico, è necessariamente una funzione semplicemente o doppiamente periodica.

Essendo la più generale funzione ellittica una funzione razionale di z e Z, nel Cap. VIII vengono trattati gli integrali di una siffatta funzione; e, seguendo Legendre, esse vengono ridotte alle tre forme tipiche note come forme normali di I, II e III specie; ivi è anche fatto uno studio accurato degli invarianti e covarianti della quatrica binaria, per giungere alla forma normale di un integrale ellittico proposta da Weierstrass: è anche segnalata una trasformazione mediante la quale si passa direttamente dalla forma normale di Legendre a quella di Weierstrass.

Il Cap. IX ha per soggetto i moduli di periodicità, sia per la forma normale di Legendre che per quella di Weierstrass, con l'indicazione dei periodi tanto con la notazione di Jacobi che con quella di Weierstrass; si dimostra anche che il parallelogramma dei periodi è una rappresentazione conforme della superficie di Riemann già introdotta.

Nel Cap. X sono studiate le funzioni Θ sotto forma di serie e di prodotti infiniti e viene stabilito il teorema fonda-

Digitized by Google

mentale di Jacobi sopra l'addizione di quelle funzioni. Nel seguente Cap. sono trattate le funzioni *sn*u, *cn*u, *dn*u; essendo esse esprimibili come quozieute di funzioui Θ, le loro proprietà possono derivarsi da quelle di tali fuuzioni; così se ne pongono in evidenza gli zeri e gli infiniti, si stabiliscono la trasformazione immaginaria di Jacobi e la trasformazione di Landen, ecc.

Il Cap. XII è consacrato alle funzioni biperiodiche di seconda specie di Hermite; viene dimostrato che tutte le funzioni di tal fatta che hanno determinati moltiplicatori, possono esprimersi in termini di una funzione fondamentale, di cui viene insegnata la determinazione, non senza tacere il caso d'eccezione segnalato dal Mittag-Leffler. Seguono notevoli applicazioni, su cui ci è vietato di arrestarci.

La trattazione degli integrali di seconda specie si trova nel Cap. XIII; dopo averne stabilite le forme canoniche introdotte da Legendre e Jacobi, l'A. li studia, con l'ajuto di una superficie di Riemann, stabilisce una celebre formola di Legendre e introduce la funzione *Zeta*, di cui insegua svariate ed interessanti rappresentazioni analitiche.

Scopo del Cap. XIV dell'opera che esaminiamo è di gettare le basi della teoria delle funzioni ellittiche secondo il metodo di Weierstrass; già fin dal Cap. VIII era stata esposta la connessione fra le funzioni *sn* u e *p*(u) ora l'A. esprime le funzioni e le quantità che compaiono nella teoria di Weierstrass mediante le analogie introdotte da Jacobi ed usate dai suoi seguaci; così la funzione ς è espressa mediante fuuzioni Θ, la funzione ς mediante la *Zeta* ecc. e sono stabilite le relazioni che passano fra i corrispondenti moduli di periodicità. La teoria di Weierstrass è ulteriormente svolta nel Cap. XV, ove si trovano molteplici eleganti sviluppi infiniti di vario tipo delle funzioni p (u), ζ (u), ς (u).

Nel Cap. successivo si apprendono i teoremi di addizione per le varie sorta di funzioni ellittiche dianzi definite; così, per le funzioni Jacobiane, detto teorema vien dedotto da formole precedenti sopra le funzioni Θ, mentre quello concernente le funzioni di Weierstrass vien derivato da una formola fondamentale concernenti le funzioni ς; l'A. fa poi cenno dei metodi di Eulero, Lagrange e Darboux per stabilire il teorema d'addizione degli integrali ellittici. Altre formole importanti concernenti le funzioni dianzi definite si trovano nel Cap. XVIII, su cui la deficienza di spazio ci vieta di arrestarci.

Nel Cap. XVIII l'A. suppone che nelle funzioni Θ e ς si attribuiscano alla variabile i valori zero o un quarto di un periodo e trova varie espressioni per le costanti che così risultano;

Digitized by Google

è nota l'importanza aritmetica di tali ricerche, che l'A. conduce tenendo sempre d'occhio tanto la teoria di Jacobi quanto quella di Weierstrass.

Dal Cap. XIX si apprende come si costruisca il più semplice integrale ellittico di terza specie (quello, cioè, che diviene logaritmicamente infinito in due punti della superficie di Riemann) ed è costruita la corrispondente superficie semplicemente connessa; se ne deducono i moduli di periodicità e, col mezzo della notazione Jacobiana, l'integrale di terza specie è espresso mediante funzioni Θ, forma che rende agevole il vedere che cosa accada quando si scambino fra loro modulo ed argomento. Da ciò l'A. è indotto a introdurre la funzione Ω; nè manca di stabilire i risultati analoghi nella teoria di Weierstrass.

Non meno di cinque metodi differenti sono esposti dal Prof. Hancock nel Cap. XX per rappresentare analiticamente qualunque funzione biperiodica di ordine qualsivoglia; egli inoltre dimostra che il più generale integrale ellittico può esprimersi come integrale di I o II specie o in funzione di un numero finito d'integrali di III specie o finalmente in funzione razionale di p (u) e p' (u).

Nell'ultimo Capitolo l'A. ritorna sopra un soggetto di cui già erasi occupato nel Cap. II (ove però la ricerca era stata limitata all'ipotesi che le funzioni considerate fossero ad un valore): cioè la determinazione di tutte le funzioni analitiche che possiedono un teorema d'addizione algebrico. La conclusione a cui egli arriva è che una tale funzione è radice di un'equazione algebrica, i cui coefficienti sono funzioni razionali di una funzione analitica uniforme avente un teorema di addizione algebrico.

Chiude il volume una serie di Tavole di formule che comprendono tutte quelle che entrano nelle teorie di Jacobi e Weierstrass, essendo poste in contatto quelle che si corrispondono nelle due teorie.

Emerge da tutto ciò che nel volume in discorso la teoria delle funzioni ellittiche è svolta completamente nella sua parte fondamentale, da un punto di vista più elevato di quello che si trova in altri trattati giustamente reputati.

I due volumi seguenti — che auguriamo di potere presto annunciare — conterranno l'uno le applicazioni delle funzioni ellittiche a problemi di geometria e meccanica, l'altro quelle dottrine dell'alta aritmetica e dell'algebra che si connettono alla teoria delle trascendenti in parola.

G. L.

Digitized by Google

Poliedri.

A. Rosenthal — *Untersuchungen über gleichflächige Polyeder.* (Estratto dal Vol. XCIII dei *Nova Acta der K. Leop. Carol. Deutschen Akademie der Wissenschaften,* 1910, 4.° p. 148, con 4 Tav. lit.).

Questo lavoro (mediante il quale l'A. ottenne la laurea dottorale presso l'Università di Monaco di Baviera) fa sistema con quelli del Brückner, sui quali a suo tempo abbiamo attratta l'attenzione dei lettori del *Bollettino* (T. IV, 1901, p. 74 e T. XI, 1908-09, p. 75), avendo esso per iscopo lo studio di alcuni poliedri dotati di qualche parziale regolarità. E' notevole che tali ricerche si prestano ad applicazioni cristallografiche, dando ragione della presenza in natura di certi aggruppamenti cristallini che, finora, si ritennero eccezionali ed inesplicabili. Questo fatto servirà forse a meglio stabilire l'importanza di ricerche, verso cui finora noi Italiani ci siamo dimostrati indifferenti, e auguriamo valga a modificare un' attitudine che non sembra in alcun modo giustificata. Per chi desidera ulteriori particolari sopra i risultati ottenuti dall'A. non possiamo che rimandarlo al lucido riassunto che egli ne pubblicò, sotto il titolo *Zur Theorie der gleichflächigen Polyeder* nei Sitzugsber. der math. phys. Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften (T. XXVIII, 1908).

G. L.

Probabilità.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversichenung von Emanuel Czuber. Zweiter Band 8.° p. X+470, Leipzig e Berlin, B. G. Teuner (Prezzo del vol. leg. Mk. 14).

Della nuova edizione della 1.ª parte di questo trattato abbiamo dato notizie in questo *Bollettino* nel primo fascicolo dello scorso anno. Segnaliamo ora ai lettori la seconda edizione della 2.ª parte (del contenuto di questa 2.ª parte demmo già notizia, al compiere della 1.ª edizione, nel vol. VII di questo *Bollettino).* L' ossatura generale di questa nuova edizione è identica a quella della prima, ma si può dire che non vi è paragrafo il quale non sia stato accuratamente ritoccato e spesso notevol-

Digitized by Google

mente ampliato. Dal punto di vista, per così dire, filosofico, ci piace segnalare la introduzione alla parte IV (Statistica matematica) dove con chiara esposizione, con fina discussione e larga esemplificazione sono posti in evidenza i principii per lo studio delle masse statistiche, la relazione fra la probabilità statistica e la ordinaria probabilità a priori, il grado di logica possibilità dello studio di determinati fatti statistici. Degli studi relativamente recenti di Pearson e di Edgewort è tenuto debito conto.

Dal punto di vista pratico noteremo, in particolare, l'ampliazione apportata ai capitoli riguardanti la formazione delle tavole di mortalità, la riassicurazione *(Prämienrückgewähr)* e la riserva.

Anche la raccolta delle tabelle numeriche ha subìto opportuni incrementi, essendosi aggiunte le « British Office Life Tables » e le tavole di mortalità delle Assicurazioni Austro-Ungariche. Alla tavola d'invalidità del servizio ferroviario che figurava nella 1.ª edizione son quì sostituite le tavole di invalidità e di mortalità degli invalidi di Zimmermann.

P. Pizzetti

Franz Hack — *Wahrscheinlichkeitsrechaung.* Mit 16 Figuren. Sammlung Göschen N. 508. p. 123. Leipzig G, J. Goeschen 1911. (Prezzo Mk. 0.80).

Malgrado i detrattori che ha trovato, il calcolo delle probabilità continua la propria strada, senza preparare spiacevoli sorprese ai numerosi assicuratori che gli chiedono consigli per architettare nuovi tipi di affari. Onde è ben naturale che ad esso fosse presto o tardi consacrato un volume della ben nota collezione Göschen. Data l'esiguità dello spazio di cui disponeva, l'A. non ha potuto diffondersi in lunghi sviluppi; ma dal seguente indice risulta che egli lo ha saputo utilizzare assai bene, tenendo conto tanto delle esigenze della teoria, quanto delle domande della pratica:

I. *Teorie fondamentali.* — II. *Applicazioue a problemi speciali.* — III. *La legge dei grandi numeri.* — IV. *Probabilied basata sopra l'esperienza.* — V. *Teoria degli errori di osservazione,* — VI. *Applicazione del calcolo delle probabilità alla statistica.* — *Appendice. Tavole numeriche.*

G. L.

Digitized by Google

Trasformazioni geometriche.

RUDOLF STURM, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften* 2ter, 3ter, 4ter Bd. Pag. VIII + 346, VIII + 374, X + 486. Leipzig u. Berlin. B. G. Teubner, 1908-9. (Pr. Mk. 16, 20, 20).

Tanta è l'importanza assunta in questi ultimi tempi, nel campo delle ricerche geometriche, dalla teoria delle trasformazioni tra enti geometrici, una o più volte infiniti, che non può a meno di destare interesse vivissimo un'opera, avente carattere riassuntivo, come quella dello Sturm che quì presentiamo, e di cui, su questo stesso *Bollettino,* è già comparsa la relazione, per quanto riguarda il 1° volume (v. T. I, p. 40).

Nel 1.°, come nei successivi tre volumi, pubblicati a breve distanza da quello, si rileva, anzitutto, come le trasformazioni studiate non escano dallo spazio ordinario: le varietà che si corrispondono nelle trasformazioni che vengono via via presentate sono sempre le forme geometriche fondamentali di Steiner, oppure forme dello spazio rigato (che lo Sturm stesso ha enumerato e definito in altra sua opera), oppure varietà dello spazio ordinario riferibili biunivocamente a queste. Si cercherebbero quindi invano le trasformazioni (proiettive o no) di una varietà iperspaziale in un'altra, come pure tutte quelle trasformazioni in cui una almeno delle varietà che si corrispondono non é contenuta nello spazio ordinario. Notiamo però che, sebbene un tal lavoro non sia fatto nell'opera dello Sturm, una buona parte dei risultati esposti si possono estendere a varietà algebriche di spazî superiori, senza bisogno di ulteriore studio.

È già stato osservato che il metodo è quasi esclusivamente sintetico; non è però il metodo geometrico autonomo di Staudt, quale si ammira nella sua classica opera, no. Quì troviamo, specialmente nel 1.° volume, varie questioni trattate analiticamente: così le corrispondenze (proiettive, trilineari, multiple) tra forme fondamentali di 1.ª specie sono definite col sussidio dell'analisi; analiticamente vengono presentate le prime proprietà di queste corrispondenze, come pure i due concetti fondamentali del birapporto di 4 elementi d'una forma di 1.ª specie, e degli elementi immaginarî. La parte analitica, pel 1.° vol. si spinge fino ad esporre gli elementi della teoria degli invarianti delle forme binarie, elementi che vengono poi usati qua e là nel seguito dell'opera. Brevissimi ritorni al metodo analitico si possono anche notare nei volumi successivi; ma, in complesso, la parte analitica serve solo a stabilire il fondamento della trattazione: essa è limitata al purissimo necessario, per evitare le lunghe

Digitized by Google

discussioni che occorrerebbero volendola escludere completamente. In tal modo l'A. può giungere più rapidamente allo scopo principale dell' opera: lo studio delle trasformazioni geometriche, senza esser trattenuto da freni che, se anche avessero conferito maggior unità di metodo, avrebbero prodotto, di necessità, lunghi studi nei fondamenti, inutili in questo caso, se si pensa che tali questioni non attendono più la loro soluzione. Ma, subito dopo, si nota il prevalere del puro metodo sintetico, che sempre più invade, fino ad acquistar tanta importanza da conferire all' opera tutta uno dei suoi caratteri più cospicui. Le dimostrazioni sono sempre stringate, quantunque sviluppate in tutti i particolari; il rigore nello svolgimento logico della trattazione (unito alla mancanza assoluta di figure) ricorda talora la severità del metodo staudtiano.

Inutile dire che ogni trasformazione viene studiata a fondo, con dovizia di particolari, di casi speciali, di esempî svariatissimi; ma, con tutto questo, il libro non si riduce ad un semplice elenco di trasformazioni, catalogate a seconda degli enti tra cui son poste, e delle loro analogie. Per quanto dal titolo dell' opera possa sembrare che a questo soltanto si debba ridurre il contenuto, possiamo trovare, raccogliendone le membra sparse nei varî capitoli, una teoria assai vasta delle cubiche e quartiche sghembe, delle superficie di 2° e 3° ordine, dei complessi e delle congruenze in generale, come pure di complessi particolari (complesso lineare, tetraedrale, di Hirst, di Battaglini, ecc.), e via via. Gli è che, capitolo per capitolo, le trasformazioni esposte vengono applicate allo studio di enti geometrici; enti che vengono anzi generati in modi svariati, ogni volta che se ne presenti la occasione, e le cui proprietà, una volta stabilite, vengono a costituire parte integrante della trattazione, in quanto su di esse sono fondate sovente la definizione e le proprietà di nuove trasformazioni. Per questo, fatta eccezione di pochi capitoli, è difficile, anzi impossibile, separare ciò che è pura teoria delle trasformazioni da ciò che è applicazione, per questo, anzi, si accresce l' interesse del lettore, che, scorrendo le ben 1800 e più pagine (tante ne conta l' opera completa), vede sorgere sotto i suoi occhi, da osservazioni, in apparenza, secondarie, su qualche trasformazione molto particolare, le generazioni più interessanti di qualche ente geometrico notevole, le cui proprietà ne seguono poi con un' eleganza ed una rapidità che nulla hanno da invidiare a quelle dell' analisi pura.

I vol. 2°, 3°, 4° sono dedicati rispettivamente: alle trasformazioni lineari tra forme di 2.ª specie; alle analoghe trasformazioni tra forme di 3.ª specie; alle trasformazioni non lineari,

Digitized by Google

univoche e multiple, tra forme di 2.ª e 3.ª specie; essi comprendono complessivamente 10 parti. In ciascuna di esse la materia svolta e la sua disposizione sono quelle che ora tenteremo, per quanto è possibile, di descrivere brevemente.

2.° *Vol.* Parte III. Si apre con le proprietà elementari delle collineazioni e correlazioni piane, con l'enunciato della legge di dualità nel piano e nella stella, e con lo studio di alcune questioni speciali (coniche e fasci di coniche corrispondentisi in una collineazione, proprietà del pentagono piano completo, triangoli e quadrangoli polari in una correlazione). Seguono le proprietà metriche e focali di due piani collineari o correlativi, e quindi i casi particolari metrici della collineazione, con applicazioni allo studio delle coniche affini, di alcune questioni di massimo e minimo relative a triangoli e parallelogrammi inscritti o circoscritti ad un' ellisse. Si passa quindi allo studio delle collineazioni tra piani sovrapposti, trattando, in particolare, la similitudine, la congruenza, l' omologia coi suoi casi particolari metrici, e facendo applicazioni allo studio di quelle omografie che si possono rendere omologiche con un trasporto di uno dei piani, allo studio delle coniche omologiche, alla proiezione imaginaria di Wiener, alle collineazioni di Hermite, ecc. Analogamente per le correlazioni piane: ivi figurano le due coniche fondamentali, individuanti un fascio-schiera che contiene, in particolare, le coniche corrispondenti di sè stesse. Segue un capitolo sulle polarità piane e relative proprietà metriche (comprese le focali): tutte illustrate con varî esempî, e completate con lo studio di varie questioni speciali (trasformazione lineare d' una polarità, polarità rispetto a due coniche bitangenti, sistemi di due coniche una polare dell'altra, o di cui una è autopolare rispetto all' altra). I risultati precedenti vengono estesi alla polarità tra stelle; e qui si presentano: la polarità ortogonale, la polarità assoluta sul piano improprio come sezione di una polarità ortogonale. Seguono le proprietà metriche, relative quindi a: triedri omologhi trirettangoli, assi, piani principali, piani ciclici e relative involuzioni di angoli retti, assi focali e relative involuzioni di piani normali, ecc. Vengono studiate anche le proiettività tra un piano ed una stella, le uguaglianze tra due stelle sovrapposte; indi le collineazioni piane cicliche, le collineazioni in cui di due triangoli omologhi uno è inscritto all'altro. Interessanti sono i due paragrafi successivi, dedicati, il 1.° alla cubica sghemba, con le sue generazioni proiettive, e con vari casi particolari (tra cui la cubica di Helmholtz); il 2° alla generazione proiettiva delle superficie cubiche secondo Grassmann, da cui seguono le proprietà fondamentali, relative alle

Digitized by Google

27 rette, a due reti associate di cubiche sghembe in esse contenute; sono presentati i casi particolari delle superficie cubiche con punto doppio e delle rigate cubiche. Il capitolo si chiude con una generazione del complesso tetraedrale; il capitolo seguente è dedicato specialmente ad una generazione delle quadriche (con stelle correlative) ed al complesso di Hirst.

IV Parte. Lo studio dei vari casi degeneri di correlazioni e collineazioni piane prepara opportunamente il terreno ai paragrafi seguenti, in cui, in base ai metodi di Schubert, vengono enumerate le dimensioni dei sistemi costituiti da tutte le trasformazioni (eventualmente degeneri) d'una natura prefissata. Tali enumerazioni di costanti, e la relativa notazione simbolica, servono bene per determinare il numero delle correlazioni e collineazioni che soddisfano ad un certo numero di condizioni elementari.

Indagini di questa specie porgono modo di individuare proiettività (di varia natura) tra forme di 2.ª specie in modi diversi, per ciascuno dei quali è data la corrispondente costruzione geometrica.

Si passa quindi allo studio dei sistemi lineari di correlazioni, e delle superficie o sistemi lineari di superficie che con essi si possono generare; un capitolo speciale è dedicato alla relazione di apolarità tra due sistemi di correlazioni (generiche od involutorie). Dopo un breve cenno sui sistemi lineari di collineazioni e sui connessi, il volume si chiude con due capitoli riguardanti il problema della collineazione e quello della correlazione tra stelle.

3.° Vol. Parte V. Lo sviluppo di questa 5.ª parte procede parallelamente a quello della 3.ª, salvo lo studio delle inevitabili questioni nuove. Gli argomenti svolti sono i seguenti: Collineazioni e correlazioni spaziali, e loro generazione; condizioni che le individuano. Tetraedro di coincidenza d'una collineazione. Omologia spaziale, omografia assiale, collineazioni involutorie (con applicazioni alle superficie armonicamente coniugate di 1.ª e di 2.ª specie, alla decomposizione di un'omografia generica in 4 omologie). Affinità, similitudine e congruenza nello spazio; e casi particolari metrici dell'omologia. Complesso tetraedrale, studiato in rapporto alle sue generazioni, alle rigate e congruenze in esso contenute, ai fasci e schiere di spazî collineari; e con applicazioni alle quadriche omologiche o collineari, alla trasformazione quadratica. Le collineazioni φ^2 e le loro due specie, studio molto minuto sulle collineazioni che mutano in sè stessa una data quadrica, sul modo di generarle, sui loro casi speciali, sulla loro decomposizione in collineazioni speciali, e con parti-

Digitized by Google

colare riguardo alle collineazioni assiali. Trasformazioni d' una cubica sghemba in sè stessa mediante collineazioni (in particolare mediante un' involuzione assiale). Forme omologhe nella correlazione (che conduce allo studio delle due quadriche e del complesso quadratico fondamentale). Polarità nulla e complesso lineare (troviamo qui le generazioni di Chasles e di Sylvester di un complesso lineare, il sistema nullo determinato da una cubica sghemba, le proprietà metriche dei complessi lineari, i sistemi lineari di complessi, le applicazioni ai sistemi di forze). Polarità spaziali e loro quadriche fondamentali, con applicazioni alle trasformazioni collineari di una polarità, ai tetraedri, pentaedri, esaedri polari. Tetraedri autopolari in due polarità; fasci e schiere di polarità. Proprietà metriche, e particolarmente focali, d' una polarità, che conducono allo studio dei sistemi di quadriche confocali. Investigazioni ulteriori sulle correlazioni in generale: Superficie base, tetraedri base, proiettività che generano il complesso quadratico fondamentale, superficie singolare e raggi singolari di questo complesso, correlazioni parzialmente involutorie e complesso di Battaglini, proprietà caratteristiche delle polarità nulle, pentaedri, esaedri polari ecc. Collineazioni sferoidali (contenenti due sfere omologhe), che sono le sole che si possano rendere omologiche con trasporto d' uno dei due spazî, con applicazioni al caso degli spazî affini e simili, al problema di Cayley. Le correlazioni φ^2 e le loro due specie: coppie di quadriche di cui ciascuna è autopolare rispetto all' altra. Corrispondenze involutorie permutabili, esaminando solo il caso delle proiettività spaziali involutorie. Trasformazioni d' una cubica sghemba in sè stessa mediante correlazioni, con speciale riguardo alle polarità ordinarie. Correlazioni con superficie-base coincidenti o variamente degeneri; le due correlazioni cicliche di 4.° ordine. Proprietà metriche della correlazione, e correlazione parabolica. Collineazioni per le quali avviene che un tetraedro è inscritto nel suo omologo. Collineazioni cicliche con cicli non piani, con sviluppi speciali riguardo alle collineazioni cicliche quaternarie, quinarie e senarie. Fasci di collineazioni e correlazioni, considerando in particolare il gruppo di 32 elementi definito con 6 polarità nulle in involuzione, il gruppo delle rotazioni di un esaedro od ottaedro, il gruppo delle simmetrie in un icosaedro, ecc.

VI Parte. Questa parte s' inizia con la definizione (geometrica) e le proprietà principali dei sistemi lineari di curve e superficie e delle loro corrispondenze proiettive; e queste proprietà vengono applicate alla generazione di curve e superficie di varî ordini. Seguono i fondamenti della teoria delle polari d'un punto rispetto ad un gruppo di punti, o ad una curva, o ad una su-

Digitized by Google

perficie; studiando anche l' eventualità di punti multipli, nonchè il sistema delle prime e delle ultime polari, le proprietà della Jacobiana, della Cayleyana, della Steineriana, dell' Hessiana. Vengono considerate anche le polari di un punto rispetto ad un triangolo o ad un tetraedro. Si rientra quindi nell'ordine d'idee che già si è rilevato esser fondamentale per la IV Parte; si studiano cioè i vari casi degeneri delle collineazioni e correlazioni spaziali, il numero delle correlazioni e collineazioni che soddisfanno a date condizioni, esaminando successivamente i varî casi (compresi i casi degeneri) che queste corrispondenze possono presentare. Si studiano poi i sistemi lineari di correlazioni (in particolare, i sistemi lineari di polarità ordinarie o nulle), esaminando anche la relazione di apolarità tra due sistemi lineari di correlazioni. Un semplice processo di dualizzazione permette di estendere questi risultati ai sistemi lineari di collineazioni. Un ultimo capitolo è dedicato ai sistemi lineari di Reye di forme proiettive (mutuamente appoggiati), tra cui, ad es., il sistema ∞^2 dei fasci di piani proiettivi aventi per assi le bisecanti di una cubica sghemba, ed il sistema ∞^1 delle stelle collineari aventi per centri i punti della stessa cubica.

4° Vol. VII Parte. Contiene la teoria delle trasformazioni cremoniane piane, che s' inizia con lo studio delle reti omaloidiche e loro caratteri di multiplicità, studio che viene illustrato con varî esempî, e che permette di determinare i casi più semplici di tali trasformazioni. A questioni speciali è dedicato il paragrafo successivo (elementi uniti di una corrispondenza cremoniana tra piani sovrapposti, curve isologiche, cicli di elementi, ecc.), a cui segue un altro dedicato esclusivamente alla trasformazione quadratica piana. Dopo aver esaminato le trasformazioni quadratiche involutorie, si passa alla trasformazione per raggi vettori reciproci, e quindi all' affinità circolare di Möbius. Tra le trasformazioni involutorie di ordine superiore al 2.° troviamo quella di Geiser (di 8.° ordine), applicata alla rappresentazione piana delle superficie di 3.° ordine, poi quelle del tipo di Jonquières. Questa parte si chiude con un capitolo in cui viene stabilito il principio di corrispondenza nel piano (o nella stella), ed in cui trovansi applicazioni a varî problemi di geometria della retta (rette che si appoggiano a rette omologhe di tre rigate quadriche, o di tre stelle, o di tre piani, ecc. riferiti collinearmente).

VIII Parte. Vengono qui studiate le seguenti questioni Corrispondenze univoche sulle cubiche piane generali, con applicazioni ai poligoni di Steiner, alle collineazioni che mutano in sè stessa una data C^3, alla C^3 come Jacobiana di tre diverse reti

Digitized by Google

di coniche. Involuzioni di ordine superiore sopra una cubica piana. Corrispondenze sopra una quartica sghemba di 1.ª specie, dedotte da quelle sopra una cubica piana sua proiezione. Corrispondenze sopra una quartica piana con due punti doppî. Il principio di corrispondenza sopra curve non unicursali.

IX Parte. In questo breve capitolo vengono studiate le trasformazioni piane doppie specialmente di 2.° e di 3.° grado, quindi le trasformazioni m-univoche, ed alcuni esempi di trasformazioni (2, 2).

X Parte. Tra le superficie di cui qui si danno le rappresentazioni piane rileviamo: le quadriche, le superficie cubiche (di cui si deduce la rappresentazione sia partendo dalla generazione con fasci trilineari, sia partendo dalla generazione di Grassmann con stelle collineari), la superficie di Steiner, le rigate cubiche, le rigate di genere 0, le superficie dì 5.° ordine con cubica sghemba doppia, la superficie generale di n.° ordine con una retta (n-2)-pla, la superficie di Noether. ecc.

XI Parte. Delle trasformazioni cremoniane dello spazio vengono esposte anzitutto le proprietà generali relative ai due sistemi omaloidici di superficie, alle loro multiplicità, agli ordini della trasformazione; dopo di che vengono esaminate le trasformazioni (2,4), (2,3), (2,2), (3,6), (3,5), (3,4), (3,3), trasformazioni che presentano numerosi casi particolari, e che talora offrono l' occasione di dare nuove rappresentazioni di superficie. Uno studio speciale è fatto sulle trasformazioni in cui uno dei due sistemi omaloidici è costituito da rigate cubiche. Un ultimo paragrafo è dedicato alle trasformazioni involutorie.

XII Parte. Contiene la dimostrazione dei due principi di corrispondenza nello spazio di punti e nello spazio rigato; a cui segue lo studio di alcune trasformazioni speciali (2,2), (2,4), (4,5) ecc., oltre ad una trasformazione (2,2) dedotta da una notevole generazione delle quadriche (dovuta a Jacobi). L' ultimo capitolo è dedicato alle trasformazioni nulle, o trasformazioni multiple reciproche per le quali un punto ed un piano omologhi si appartengono sempre.

Per presentare un quadro possibilmente completo di tutta l' opera, dobbiamo ricordare ancora, in primo luogo la breve appendice in cui sono esposte alcune aggiunte e modificazioni, dirette a migliorare alcune dimostrazioni; in secondo luogo gli elenchi dei termini tecnici, e l' indice generale, che è ripetuto volume per volume: ottimi mezzi di orientare il lettore in così vasto campo.

Quale l' utilità di un' opera talmente poderosa? Anzitutto

Digitized by Google

quella di aver riunito in un quadro unico delle ricerche sparse in una quantità stragrande di memorie, non sempre accessibili a chiunque (specialmente ai principianti) per la grande quantità di nozioni che presuppongono nel lettore. Ma, oltre a quest' utilità, che l' opera dello Sturm ha comune con tutte le opere riassuntive, a qualunque campo siano dedicate, ve n'è un' altra ben maggiore, che l' autore ha avuto di mira. Vogliamo alludere alla diffusione del metodo sintetico, in un' epoca in cui, stando al detto di illustri scienziati, la schiera dei geometri puri si è assottigliata notevolmente, di quel metodo che la storia della matematica ci impone di coltivare con amore, tanto quanto i metodi dell' analisi, per la fecondità dei risultati che può dare, quando sia con quelli accompagnato. Onde possiamo concludere, ben a ragione, mandando un vivo ringraziamento a R. Sturm per questa sua opera, che dichiariamo indispensabile a quanti intendono dedicarsi alle ricerche, tanto divertenti ed istruttive, di geometria pura.

EUGENIO G. TOGLIATTI.

Geometria projettiva.

VEBLEN AND YOUNG — *Projective Geometry.* — Vol. I in 8.° p. 342+X. Ginn and Company — Boston U. S. A. 1910.

Il libro dei signori Veblen e Young è destinato a poter valere come libro di testo ai corsi di geometria projettiva nelle università americane. Questo primo volume contiene la geometria projettiva pascaliana; quelle teorie geometriche cioè che si possono svolgere sui postulati di collegamento e sulle proprietà lineari della projettività, indipendentemente dalle nozioni di ordine e di continuità; o, analiticamente, quelle teorie che valgono in uno spazio numerico in cui le ordinarie operazioni razionali godano delle comuni proprietà associative, commutative, distributive.

Per quanto riguarda il metodo, gli A. si pongono dal punto di vista puramente logico formale; facendo quindi astrazione da ogni contatto colla geometria elementare euclidea, si preoccupano solo di assumere le idee primitive e i postulati che sono strettamente necessari nel nominato campo geometrico. Per questo riguardo, e per altri, come la deduzione del principio di dualità dai postulati, alcune considerazioni sulle configurazioni e particolarmente sui poligoni completi, il libro si avvicina a quanto si usa in varie università italiane e si trova svolto per es. nelle Lezioni di Geometria projettiva dell'Enriques. Ma, oppo-

Digitized by Google

stamente a quanto avviene in questi corsi, l'esclusione delle considerazioni di ordine e di continuità impone agli A. di definire la projettività come prodotto di prospettività; il teorema fondamentale, che una projettività sopra una forma di prima specie che abbia più di due elementi uniti è l'identità, è assunto come postulato. Nè altrimenti poteva essere, poichè si rifiutano tutti i mezzi su cui poggiano le comuni dimostrazioni: la continuità in senso ampio (di Dedekind), la continuità in senso stretto (di Archimede) e le considerazioni metriche. A vero dire però il grave passo che all'intuizione si imporrebbe col presentarle di colpo un tal postulato è reso più facile col far precedere la dimostrazione che quella projettività tiene fermi tutti i punti che dipendono razionalmente da quei primi tre.

La teoria sintetica delle coniche parte dalla generazione mediante forme fondamentali projettive, mentre solo più tardi e per via analitica è stabilito il legame colla teoria generale delle polarità piane.

Appunto una caratteristica di questo libro in confronto di quelli apparsi finora con scopo didattico anzichè critico, si è quella di definire abbastanza per tempo un sistema astratto di numeri rappresentabili sui punti d'una punteggiata, e di definire mediante costruzioni di projettività sopra questa le operazioni aritmetiche fondamentali; ed applicare infine tal sistema di numeri alla rappresentazione per coordinate delle forme fondamentali di 1ª, 2ª e 3ª specie. Gli autori non si allontanano d'altronde in ciò da quanto fu fatto prima dall'Hilbert nei suoi *Grundlagen* e fu ripreso poi e applicato da vari autori (1).

Ne segue evidentemente la possibilità di definire birapporti e coordinate projettive senza ricorrere a concetti metrici, dopo di che la teoria prende andamento prevalentemente analitico e così nella trattazione delle collineazioni, reciprocità e polarità, dei gruppi di projettività, degli invarianti di forme binarie. E per questa via analitica si supera, almeno formalmente, la difficoltà di trattare, senza considerazioni di continuità e di immaginari, dell'intersezione di rette e coniche o coniche fra loro. Si dimostra cioè che, assegnata un'equazione i cui coefficenti appartengono ad un determinato campo di razionalità, si può estendere questo campo mediante nuovi simboli numerici sui quali

(1) Non sapremmo spiegare perchè gli AA. pur avendo più volte occasione di far cenno dei *Grundlagen* dell'Hilbert, preferiscono qui citare un lavoro dell'Hessenberg, che riprende bensì le stesse idee, però mantenendesi un po' più lontano forse dal loro punto di vista. Non è quì il solo luogo in cui le citazioni, che pur son numerose, sono tutt'altro che accurate e a proposito.

Digitized by Google

le operazioni siano così definite che continuino a valere le proprietà fondamentali di queste e che nel campo esteso l'equazione proposta ammetta radici: così ogni spazio projettivo in cui siano considerate varietà algebriche si può considerare come *sottospazio* di uno spazio projettivo più ampio in cui quelle varietà hanno intersezioni.

Il volume si chiude con un capitolo sullo spazio rigato e le quadriche. L'estensione dello spazio, di cui or ora si è fatto cenno, permette di parlare della quadrica generale come di una quadrica rigata.

B. LEVI

L. N. G. FILON — *An introduction te projective Geometry.* — 8° p. VI+249. London, E. Arnold 1909. (Prezzo del vol. leg. sc. 7.6).

La geometria projettiva, che attraversa in Italia un periodo di opposizione e di scredito (almeno in certi circoli), sembra di giorno in giorno guadagnare terreno in Inghilterra, ove si va a ragione diffondendo la opinione che le teorie che la compongono porgano il mezzo d'indagine veramente appropriato per lo studio delle linee e delle superficie di second'ordine. Questa attitudine, che fu da noi segnalata a proposito di un trattato sopra le coniche di F. S. Macaulay (*Bollettino*, T. IX, 1906, p. 118), è confermata da quello che oggi annunciamo, altro rappresentante di un'epoca di transizione, altra manifestazione di un compromesso fra i vecchi, che ancora non vogliono cedere, ed i giovani, che non riuscirono ancora ad impadronirsi del potere. Quale ne sia il contenuto emerge dall'*Indice* seguente:

I. Projezione. II. Doppio rapporto; punteggiate e fasci projettivi. III. Proprietà projettive delle coniche. IV. Poli e polari. V. Proprietà non focali delle coniche. VI. Proprietà focali delle coniche. VII. Elementi uniti. VIII. Elementi immaginari ed omografia. IX. Trasformazione delle figure piane. X. Involuzione. XI. Piani projettivi. XII. Sistemi di coniche. XIII. Il cono e la sfera. XIV. Quadriche.

Non si attarderemo ad esporre particolari sul modo di trattazione, perchè (come l'A. spiega nella Prefazione) l'ordinamento della materia fu, in parte, suggerito dalla necessità di provvedere alle esigenze di scolari di varia specie. Ma segnaleremo la bellissima raccolta di esercizi di cui l'A. ha corredato il suo libro, mostrando così di sapere degnamente continuare un sistema tradizionale nella sua terra e non mai abbastanza lodato.

G. L.

Digitized by Google

Piegatura della carta.

T. Sundara Row's — *Geometrie Exercises in Paper Folding*, Edited and revised by Wooster Woodruff Beman und David Eugen Smith. With 87 Illustrations. Second Edition. Chicago, 1905. 8.° p. 148 (Prezzo del vol. leg. 4 sh. 6 d).

G. G. Young und W. H. Young — *Der kleine Geometer*. Deutsche Ausgabe besorgt von S. und F. Bernsteim. Mit 127 Textfiguren und 3 bunten Tafel. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1908, 8° picc. p. XVI+239 (Prezzo del vol. leg. Mk. 3).

Il desiderio di rendere piò facile ed attraente l'insegnamento della matematica in genere e della geometria in specie venne da molte parti (e non solo in questi ultimi tempi) manifestato e vennero anche suggeriti dei sistemi per consegnire lo scopo. I nostri lettori ricordano senza dubbio le idee svolte a tale riguardo con molta vivacità dal Laisant (cfr. *Bollettino*, T. IX, 1906, p. 75). Prima di lui un maestro indiano propose di raggiungere quell' intento trasportando « mutatis mutandis » nell' insegnamento della geometria uno degli artifici didattici in uso nel metodo fröbeliano, l' impiego, cioè, di pezzi di carta opportunamente foggiati e che gli allievi debbono piegare secondo le indicazioni dell' insegnante. Tale procedura si trova esposta ed applicata in un volume che (v. sopra) due ben noti professori americani hanno diffuso in tutte le scuole del Nuovo Continente; volume in cui le considerazioni sono limitate alla geometria del piano, ma sono spinte fin a oltrepassare i confini, non soltanto di un primo insegnamento di tale scienza, ma anche quelli del nostro insegnamento secondario, giacchè raggiungono la teoria delle coniche e delle più note curve piane speciali algebriche e trascendenti (1). A tale modo di procedere si può far l' appunto che, in molti casi, il piegare un foglio di carta non costituisce un notevole vantaggio sopra il tracciare una retta e che, d' altronde, sono molte le pagine in cui tale procedimento viene abbandonato per fare ritorno ai metodi classici.

Tali ragioni consigliarono una coppia di geometri, che

(1) Ecco, infatti, i titoli dei Capitoli costituenti il volume in discorso : I. Il quadrato. II. Il triangolo equilatero. III. Quadrati e rettangoli. IV. Il pentagono. V. L' esagono. VI. L' ottagono. VII. L'ennagono. VIII. Il decagono ed il dodecagono. IX. Il pentedecagono. X. Serie. XI. Poligoni. XII. Alcuni principi generali, XIII. Le sezioni coniche. XIV. Varie curve.

Digitized by Google

seppero già conquistarsi un posto considerevole fra i cultori delle parti più elevate della nostra scienza (cfr. *Botlettino,* T. X, 1907, 25-27) a riprendere dal canto loro la questione del modo di insegnare i primi rudimenti della geometria; e la risolsero, non un con un artificio unico, ma ricorrendo a tutti quelli che sembrarono loro prestarsi allo scopo, sia per quanto concerne le figure piane che per quelle che formano oggetto della geometria dello spazio. Così, ad es., trattando promiscuamente planimetria e sterometria, insegnarono a costruire con mezzi semplicissimi varii poligoni, alcuni dei più semplici poliedri ed anche una sfera (1).

L' indole del nostro giornale non consente che noi entriamo in più minuti particolari sopra il contenuto delle due opere in discorso; ma ci parve debito nostro il segnalare degli espedienti didattici che forse, almeno in certa misura, potranno trovare accesso anche nelle nostre scuole, dopo di essere stati eventualmente modificati per meglio adattarli all' indole di un popolo tanto diverso da quelli a cui pensavano gli autori, editori o traduttori delle due opere analizzate.

G. L.

Analisi vettoriale.

C. Burali-Forti e R. Marcolongo. — *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica-matematica.* — Torino, G. B. Petrini, a. 1909; pag. XI+ 115 (Prezzo L. 4).

L' opera che ora esamineremo (e che, per brevità, indicheremo con *O. v.)* è stata pubblicata nel Luglio del 1909, e nei due anni ormai decorsi, tanto la parte generale quanto le appli-

(1) A meglio chiarire il contenuto dell'opera di cui trattasi riferiamo qui i titoli dei § che la formano: 1. Preliminari. 2. La retta. 3. Il piano. 4. Cilindro e cono. 5. Divisione di un piano col mezzo di una retta. 6 Angoli. 7. I concetti « eguale », « maggiore », « minore ». 8. Il cerchio. 9. Divisione di una retta. 19. Eguaglianza di angoli. 11. Divisione di angoli. 12. Paragone di angoli disuguali. 13. Le perpendicolari. 14. Il rombo. 15. Il quadrato. 16. Il cubo. 17. Il rettangolo. 18. Le perpendicolari ad un pieno. 19. Il triangolo equilatero. 20. Il triangolo isoscele. 21. L' esagono regolare. 22. Il triangolo isoscele rettangolo. 23. Il tetraedro ed i solidi che ne derivano. 24. Il triangolo. 25. Triangoli congruenti. 26. Rette parallele. 27. Piani paralleli. 28. L' ottaedro regolare. 29. Proprietà delle parallele. 30. Il triangolo rettangolo. 31. Area del triangolo rettangolo e del rettangolo. 32. Il teoremo di Pitagora. 33. I parallelogrammi. 34. Triangoli coniugati. 35. Rette isogonali-coniugate.

Digitized by Google

cazioni, si sono così ampliate che, oltre alle indicazioni generali del contenuto e dello scopo del libro in questione, si rende necessario parlare brevemente anche dei lavori che dalle *O. v.* hanno preso i fondamenti del calcolo assoluto o intrinseco (non però nel senso del Cesàro) che dir si voglia.

Scopo delle *O. v.* è di dare uno strumento di calcolo, applicabile alle questioni pratiche di Fisica-matematica, Meccanica e Geometria differenziale, senza introdurre coordinate di qualsiasi specie, cioè senza introdurre elementi di riferimento che, in generale, sono del tutto estranei alla questione che si studia. L'esame delle applicazioni contenute nelle *O. v.* e di quelle che sono poi state fatte in seguito, prova che gli A. hanno raggiunto pienamente lo scopo, e rende evidente quanto essi dicono (pag. 65): « Da questa trattazione sono naturalmente scomparsi quegli artifici dipendenti dalla particolare scelta di sistemi di coordinate, e ai quali, nelle esposizioni classiche, sembra dovuto il successo di ogni ricerca ».

Gli enti assoluti dei quali gli A. fanno uso, sono le omografie vettoriali e le derivate rispetto ad un punto.

Nel cap. I son date le regole fondamentali del calcolo delle omografie, calcolo intrinseco del tutto indipendente dalle coordinate. Alcune dimostrazioni sono fatte con la scomposizione secondo tre vettori non complanari, ma questa è (pag. VIII): « una opportuna *divisione di lavoro,* un *divide et impera ;* non già le *forche caudine* delle coordinate attraverso alle quali si deve passare con sciupìo di tempo, e perdendo spesso di vista, in mezzo alla farraggine di numeri, il concetto, o geometrico, o fisico, o meccanico, della questione che si studia ».

Del resto, dai lavori recenti e da quando gli A. hanno preparato per una prossima nuova edizione delle *O. v.*, la maggior parte di queste forme, del resto puramente geometriche, hanno ceduto il posto a forme più rapide, indipendenti da qualsiasi scomposizione.

Per quanto riguarda le espressioni riferite ad una terna ortogonale di vettori unitari. è utile ricordare la seguente Nota recentissima del Prof. Boggio: *Teoremi generali sul carattere invariantivo di espressioni vettoriali* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXII; 2° sem. 1911), nella quale sono dati dei teoremi molto utili per riconoscere il carattere invariantivo di espressioni vettoriali.

Nel cap. II sono considerate le derivate di punti, vettori ed omografie, rispetto al punto P del quale sono funzioni. Tali derivate vengono indicate col simbolo leibniziano $\frac{d}{dP}$, che gode di

Digitized by Google

molte delle proprietà ordinarie del corrispondente simbolo analitico. Si ritrovano gli operatori « rot » e « div » che si introducono già nella parte elementare del calcolo vettoriale (*). Il gradiente viene opportunamente esteso alle omografie e, come caso particolare, si ottiene dinuovo il noto gradiente di un numero. Il gradiente è quì definito mediante il riferimento ad una terna di vettori unitari ortogonali; è però possibile il definirlo e studiarne le proprietà, indipendentemente da vettori di riferimento, come ha mostrato il Prof. Boggio nella Nota:

Sul gradiente di un'omografia vettoriale (Rend. della R. Accademia dei Lincei; serie 5.ª, vol. XIX; 2° semestre 1910).

Mancano nelle *O. v.* gli operatori $\triangle$ e « Rot » per le omografie; essi sono stati introdotti solo recentemente, dal Prof. Burali-Forti nei lavori:

Sull' operatore di Laplace per le omografie vettoriali (Rendic. della R. Accad. dei Lincei; serie 5ª, vol. XX; 1° sem. 1911).

Sopra un nuovo operatore differenziale per le omografie vettoriali (id. id.)

L' utilità, anzi la necessità di tali operatori risulta, oltre che dalle applicazioni fatte in queste Note a certe questioni della meccanica dei corpi continui, da varie importanti formule di calcolo integrale relative ad omografie, contenute nella Nota recentissima del Prof. Burali-Forti:

Sopra una formula generale per la trasformazione di integrali di omografie vettoriali (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino; vol. XLVI, 1911).

Nel cap. III sono svolte le applicazioni alla Fisica-Matematica, e precisamente vi é studiata la cinematica delle deformazioni infinitesime, la statica dei corpi continui, il moto libero per onde piane nei mezzi isotropi o cristallini, le leggi della propagazione di onde piane trasversali nei cristalli magnetici, e le proprietà del flusso calorifico in un corpo cristallino. Da queste applicazioni risulta già nettamente la grande semplicità e chiarezza conferita dall' uso sistemafico del Calcolo vettoriale.

In seguito la teoria della *O. v.* è stata applicata a svariate questioni di Idrodinamica del Prof. Boggio nei seguenti lavori:

— *Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell' Idrodinamica* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino; vol. XLV, 1910).

— *Sul moto stazionario lento di una sfera in un liquido vi-*

(*) Cfr. C. Burali-Forti et R. Marcolongo — *Eléments de Calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique-mathématique*, chap. VI. (Paris, Hermann, 1910).

Digitized by Google

scoso (Rend. del Circ. Matem. di Palermo, tomo XXX; 1° semestre 1910).

— *Sul moto stazionario lento di un liquido viscoso* (Rendic. della R. Accad. dei Lincei; serie 5ª, vol. XIX; 1° sem. 1910).

— *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito* (Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti; tomo LXIX, 1910).

— *Calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide* (Rendic. della R. Accad. dei Lincei; serie 5ª, vol. XX, 1° sem. 1911).

Altre importanti applicazioni delle *O. v.* sono state fatte dal Prof. Marcolongo nelle Note,

— *Applicazioni delle Omografie vettoriali alla teorica della Elasticità* (Rendic. della R. Accad. delle Scienze Fisiche-Matematiche di Napoli; 1910).

— *Momento d'inerzia ed impulso nella dinamica dei sistemi rigidi* (id. id.)

— *Sull'equazione della propagazione del calore nei corpi cristallizzati* (ibidem, 1911).

Infine, la Geometria differenziale deve al Prof. Burali-Forti varie notevoli semplificazioni, su differenti questioni, conseguite per mezzo delle *O. v.* Si vedano in proposito i suoi lavori:

— *Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie* (Rendic. della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª, vol. XVIII; 1° sem. 1909).

— *Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss relativo alla invariabilità della curvatura totale nella flessione* (id. id.).

— *Sulla Geometria differenziale assoluta delle congruenze e dei complessi rettilinei* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino; vol. XLIV, 1909).

— *Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie* (ibidem, vol. XLV, 1910).

— *Sulla rappresentazione sferica di Gauss* (Atti del R. Istituto Veneto; tomo LXIX, 1910).

— *Fondamenti per la Geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale generale* (Rendic. del Circ. Matem. di Palermo, t. XXXII, 1911).

— *Alcune applicazioni alla Geometria differenziale su di una superficie dell'operatore omografico C.* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XLVI, 1911).

M. Bottasso

Digitized by Google

Interpolazione.

I. N. Thiele, *Interpolationsrechung.* — Leipzig, B. G. Teubner, MCIXM 4° P. XII+175. (Prezzo Mk. 10).

Pubblicando il suo libro, l'A. si è manifestamente proposto di raggiungere due intenti: uno quello di offrire in maniera semplice, chiara e logica, un' esposizione dei metodi d' interpolazione oggi in uso; l' altro quello di dimostrare l' utilità del calcolo d' interpolazione, nelle ricerche matematiche superiori: calcolo infinitesimale, teoria delle funzioni e delle serie.

Il libro comprende quattro parti e un' appendice.

1ª Parte — L'A. introduce il concetto delle funzioni interpolari (*dividirte Differenzen*) $\varsigma(a, b) = \frac{A-B}{a-b}$; ne considera le proprietà distributive, e dimostrando elementarmente la validità per ogni ordine del loro concetto, ne deriva la formola generale d' interpolazione di Newton, e quella di Lagrange; considerando quindi le interpolazioni con argomenti ripetuti, dimostra essere la funzione interpolatrice d'ordine n, il coefficiente dell'n^{ma} potenza nella serie di Taylor.

Distesamente viene in appresso trattato il caso delle interpolazioni in cui, oltre ai valori della funzione, son dati altresì quelli delle derivate, e la risoluzione numerica di equazioni di grado superiore, mediante le funzioni interpolatrici.

Segue l' esposizione di metodi relativi alle integrazioni semplici e doppie. con intervalli variabili degli argomenti; nell'occasione è accennato all' applicazione nel calcolo delle perturbazioni astronomiche.

L'A. passa, quindi, ad un'accurata disamina della precisione dell' interpolazione e della extrapolazione, dopo di che si occupa delle serie infinite, convergenti e semiconvergenti, e delle loro caratteristiche: questa trattazione è continuata nell' appendice posta al termine del volume.

Chiude infine la prima parte, uno studio diligente di quelle interpolazioni da cui sorgono le serie bimoniali, e la funzione esponenziale.

2ª Parte — E' questa tutta dedicata al trattamento simbolico dell' interpolazione: molto interessante, essa porta un notevole contributo alla speditezza dei calcoli, dando ordine al meccanismo degli sviluppi, e aumentando di questi la semplicità e brevità. Merito dell'A. è poi quello d' averla saputa esporre con chiarezza e sobrietà, veramente notevoli.

Digitized by Google

3 Parte — L' A. si occupa dei metodi intesi ad agevolare l' interpolazione, allorquando a questa, per cause differenti, sarebbe inapplicabile la formola di Newton: così è messo in evidenza come considerazioni teoriche funzionali possano condurre ad utile trasformazione delle funzioni e dei loro argomenti; e come l' interpolazione grafica, se togliesi la sua minor precisione, possa nondimeno di sovente riuscir giovevole, specie là ove in genere è la forma delle funzioni sconosciuta; e come essa contribuisca a scoprire trasformazioni ed artifizi, atti a semplificare interpolazioni difficoltose.

Particolarmente interessante in questa parte, è l'introduzione e l' uso nel calcolo d' interpolazione, delle funzioni interpolari reciproche *(reziproke Difierenzen)* $\varsigma\,(a.b) = \frac{1}{p(a,b)}$.

Come l'A. riconosce, mancano alle differenze reciproche, le proprietà distributive delle funzioni interpolari ordinarie, che permettono, agevolmente e naturalmente, di collegare a queste il calcolo infinitesimale; nondimeno, il calcolo d' interpolazione che sorge con l' impiego delle funzioni reciproche, se più difficile, abbraccia certo un campo assai più vasto e vario. L' impiego di questo secondo metodo si esplica nella forma di frazione continua: e mentre il primo, relativo all' impiego della formola di Newton, si limita alle funzioni intere, l'applicabilità di esso si estende, invece, alle forme più generali delle funzioni discontinue, finite ed indefinite.

4ª Parte — Considera le interpolazioni con più argomenti, e la loro riduzione ad argomento unico.

Vengono particolarmente considerate le interpolazioni di 2° ordine, con due argomenti indipendenti, trattando dei loro sviluppi, e della loro costruzione geometrica.

Viene altresì esposto on metodo per la costruzione delle linee isobariche e consimili, quando si voglia spingere l'approssimazione al 2ª ordine incluso.

Nell'*Appendice,* infine, come già fu accennato, è nuovamente ripresa la teoria delle serie infinite col sussidio dell' interpolazione: l'A. si occupa, oltre che della loro classificazione e delle loro caratteristiche, altresì della trasformazione delle serie divergenti, e lentamente convergenti, considerando a tal uopo, i metodi di moltiplicazione e di sottrazione.

Come già si disse, uno degli scopi principali dell' A. era quello di offrire agli studiosi in chiara sintesi, l' esposizione

Digitized by Google

della teoria dell' interpolazione, nello stato in cui trovasi oggi questo ramo delle matematiche applicate.

L' intento può certo dirsi raggiunto.

Il libro si raccomanda subito per la chiarezza dell' esposizione, e per la diligenza evidente con cui fu compilato: nè il lusso dell' edizione e la nitidezza della stampa, tralasciano dal portare in ciò il loro notevole contributo.

Un appunto. tuttavia, può muoversi all'A.; la mancanza, cioè, quasi assoluta, di indicazioni bibliografiche: egli stesso, del resto, ne esprime il proprio rincrescimento, ed è evidente il vuoto che tale deficienza lascia nel lettore.

A questa mancanza, peraltro, fa lodevole riscontro la pregevole dovizia degli esempi posti a corredo della teoria: sono assai pochi i paragrafi non seguiti da applicazioni numeriche, anch' esse del pari trattate con ordine e chiarezza.

Questo pregio, unito alle altre doti, fa sì che il trattato costituisca certo un notevole ed efficace contributo alla teoria odierna del calcolo d' interpolazione.

U. Barbieri.

Calcolo delle variazioni.

J. Hadamard — *Leçons sur le Calcul des Variations.* — Paris, Hermann, 1910. Vol. I.

Singolare è nella storia delle matematiche quella del calcolo delle variazioni; noi vi incontriamo quasi tutti i più bei nomi di matematici, ci accade sovente, leggendo, di non sapere se ammirare più l' eleganza dei ragionamenti o la semplicità e l' inaspettato dei risultati, e d'altra parte noi vediamo registrati in essa ad ogni passo errori che quegli insigni pensatori non seppero evitare. Spettava alla scuola del Weierstrass di dare una sistemazione rigorosa di tali studii, sistemazione che per merito di una serie di ottimi trattati quale è quello che ci sta dinanzi, si è resa ormai popolare tra i matematici: ma ben si può dire che, mentre in altri campi il nuovo rigore che lo scorso secolo riuscì ad introdurre ci portò ad una più perfetta comprensione, ma non modificò nella sostanza quanto il sicuro intuito dei matematici era riuscito a stabilire, qui realmente tale rigore fu occasione di fondamentali scoperte.

Certamente la ragione di ciò sta nel fatto che gli enti che in questi studii fungono da variabili indipendenti sono le funzioni, e cioè enti assai complessi, per cui qui meno sicura guida è quello che si usa chiamare l' intuito o la fantasia del mate-

Digitized by Google

matico. E le difficoltà che si sono incontrate nel calcolo delle variazioni, ci debbono far presentire quanto gravi saranno le difficoltà che si incontreranno nello sviluppare quel calcolo funzionale, che l'Hadamard addita come compito prossimo dell'Analisi, e di cui il Calcolo delle Variazioni deve formare un capitolo, a quel modo che la teoria dei massimi e minimi ordinarii forma un capitolo del Calcolo infinitesimale. Certo è che fin quì, nonostante gli sforzi di matematici quali Volterra, Pincherle, Bourlet, Hadamard, Fréchet, ecc., i risultati che possediamo di Calcolo Funzionale sono ben scarsi. L'Hadamard volle tuttavia inserirli nel suo volume in omaggio ai concetti espressi più sopra. Ma, quando, finita la lettura del capitolo che ad essi dedica l'Hadamard, ci domandiamo se ed in quanto essi illuminino e siano illuminati dagli ordinarii studii del calcolo delle variazioni, a me pare che dobbiamo rispondere negativamente. Forse il giudizio potrà essere immaturo perchè non possediamo ancora che la prima parte dell'opera. Per ora, se dobbiamo essere grati all'Hadamard di avere raccolto in forma chiara e concisa i principali risultati del Calcolo Funzionale fin quì posseduti e non senza notevoli contributi personali dell'A., dobbiamo riconoscere che essi sono ancora assai disgiunti dagli studi cui il volume è dedicato; e che dobbiamo considerare tale capitolo come una parentesi, un'interessante parentesi.

Tuttavia il proposito di unire il più strettamente possibile il calcolo delle variazioni al calcolo funzionale, forse anche l'intento di rendere la trattazione completa per quanto possibile, hanno indotto l'Hadamard a dare alla teoria un assetto diverso da quello dato da Kneser, Bolza, Hankcok, ecc. Invece di salire gradatamente dai più semplici ai più complessi problemi del calcolo delle variazioni, portando separatamente e successivamente lo studio di ciascuno fino alle ultime conseguenze, l'Hadamard cerca di raggiungere subito e per ogni passo la massima generalità. Onde nel primo libro studia i campi funzionali in genere, precisando la nozione degli intorni (voisinages) di vario ordine di una funzione, nozione che racchiude come caso particolare l'ordinaria distinzione tra variazioni deboli e variazioni forti. Nel secondo libro studia la variazione prima per tutti i varii problemi fino al più generale problema di Mayer, e la ditribuzione degli estremali: considerando la variazione prima come l'analogo della derivata pel calcolo funzionale, appunto come chiusa di esso è inserito il capitolo già ricordato più sopra sul calcolo funzionale in generale. Nel terzo libro infine troviamo lo studio della variazione seconda e delle condizioni di massimo e di minimo per l'estremo libero.

Digitized by Google

Questo ordinamento ha del resto di per sè notevoli vantaggi: esso pone in luce assai viva le analogie e le differenze che presentano i varii problemi e le varie forme di uno stesso problema; ed elimina molte lunghezze e ripetizioni: d'altra parte ha pure qualche svantaggio: ad es. in quanto allontana forse troppo la considerazione dei punti coniugati (che appare fin dal secondo libro quando si studia la distribuzione degli estramali) dal criterio di Jacobi (il quale non è dato che nel terzo libro) che dà a quella nozione tanta importanza e tanto significato. E forse trascina talvolta troppo il lettore a generalizzazioni sempre più complesse prima di permettergli di vedere risolto anche il più semplice dei problemi che presenta il calcolo delle variazioni.

Quando io abbia ricordato ancora che l'Hadamard in una introduzione aggiunge le nozioni analitiche più essenziali per intendere il seguito, e precisamente riprende la teoria dei massimi e dei minimi ordinarii ed espone i teoremi fondamentali sulle equazioni differenziali, ed in appendice riprende la teoria delle funzioni implicite, che numerosi esempii corredano la trattazione, e che, scelti tra quelli che si incontrano nella Geometria, nella Meccanica e nella Fisica, questi presentano sovente per sè medesimi un vivo interesse, non mi pare che occorra dare un elenco più minuto degli argomenti svolti nel libro.

Ho già detto che la trattazione è molto accurata e completa, e che vi è tenuto conto degli studii più recenti. Copiosissimi e molto notevoli i punti in cui l'Autore ha dati nuovi complementi che illuminano la teoria, od esposto in modo originale risultati noti; felici specialmente alcune rappresentazioni geometriche. Sarebbe quì troppo lungo l'enumerare questi passi, nè sarebbe possibile indicare in breve e con sufficiente chiarezza il significato di ciascuno. Rammenterò, per esemplificare, gran parte dell'interessante introduzione e specialmente le considerazioni sui campi singolari nei massimi e nei minimi relativi; rammenterò pure l'elegante interpretazione della variazione prima per i minimi delle curve nello spazio.

EUGENIO ELIA LEVI

Digitized by Google

O. Bolza. — *Vorlesungen über Variationsrechnung.* Umgearbeitete und stark vermehrte deutsche Ausgabe der « Lectures on the calculus of variations » desselben Verfassers. In drei Lieferungen. Leipzig und Berlin, Teubner, 1908-09, 8.° p. IX+705+10 (Prezzo del vol. leg. Mk. 19).

Le *Lectures on the calculus of variations* di O. Bolza (Chicago, 1904) sono largamente conosciute come uno dei migliori trattati venuti in luce negli ultimi anni sull' importante argomento. L' edizione tedesca, più che una traduzione di esse, è una nuova opera; basti dire che le 263 pagine dell' originale sono divenute più di 700. Non solo l'autore ha ampliato in vari punti le sue lezioni, ma vi ha inserito i risultati delle più recenti ricerche sue e d' altri, e vi ha aggiunto tutte quelle nozioni analitiche sussidiarie che sono indispensabili a rendere la trattazione completamente rigorosa.

In quasi tutti i corsi di Calcolo il problema fondamentale del Calcolo delle variazioni viene senz' altro affrontato in tutta la sua generalità. Al contrario Weierstrass, nelle sue magistrali lezioni, cominciava col trattare completamente il caso più semplice possibile, quello in cui gli estremi sono fissi e sotto il segno d' integrale figurano una sola funzione incognita e la sua derivata prima. L' opportuna innovazione, che risparmia ai discenti complicazioni inutili e permette loro di vedere più chiara l' essenza del metodo, fu adottata dai suoi allievi; e appunto collo studio dell' integrale:

$$J = \int_{x_4}^{x_2} f(x, y, y^1)\, d\, x$$

comincia il Cap. 1 delle *Vorlesungen*. Enunciato e chiarito con esempi il problema fondamentale, si dimostra che condizione necessaria per un massimo o minimo è l' annullarsi della variazione prima di J; tale condizione si traduce analiticamente nell' *equazione d'Eulero* (I). Le ∞^2 curve integrali di questa equazione si dicono *estremali* del relativo problema; e reciprocamente ogni famiglia di ∞^2 curve può rappresentare le estremali di infiniti problemi del tipo considerato. Qualche modificazione è necessaria nel caso in cui gli estremi non sono fissi, ma mobili su date linee. E' importante poi l' osservazione, che la condizione d'Eulero si fonda sull' ipotesi di variazioni di forma particolare, e che, se è lecito limitare lo studio a queste variazioni nella ricerca delle condizioni necessarie, non lo è più quando si vogliono stabilire le condizioni sufficienti. In tal caso bisogna con-

Digitized by Google

siderare le variazioni del tipo più generale; e l'autore opportunamente sviluppa le formole fondamentali corrispondenti.

Nel Cap. 2 si stabilisce anzitutto che, affinchè un'estremale dia un minimo, dev'essere soddisfatta la *condizione di Legendre* (II), la quale ha la forma $R \geq 0$. Si dimostra poi che, supposta verificata la relazione $R > 0$, si ha $\delta^2 J > 0$ per qualunque variazione del tipo particolare considerato nel primo capitolo, se esiste un integrale dell'*equazione di Jacobi* che non s'annulla in alcun punto dell'intervallo $x_1\ x_2$; un tale integrale esiste sempre e soltanto quando l'integrale $\triangle(x, x_1)$ della stessa equazione che si annulla in x_1 non ha alcun'altra radice nell'intervallo. In ciò consiste la *condizione di Jacobi* (III), che può scriversi $x'_1 \geq x_2$, denotandosi con x'_1 la prima radice di $\triangle(x, x_1)$ maggiore di x_1, e includendo anche il caso in cui x'_1 non esiste. L'equazione di Jacobi sta in relazione stretta con quella di Eulero; dall'integrale generale di questa si ottiene con semplici derivazioni l'integrale generale di quella. Il punto dell'estremale di ascissa x'_1, se esiste, si dice *coniugato* di quello di ascissa x_1; esso è il punto di contatto coll'inviluppo delle ∞^1 estremali uscenti da quest'ultimo punto.

Nel Cap. 3 s'intraprende la ricerca delle condizioni sufficienti.

Le condizioni (I), (II'), (III') (con (II') (III') si vogliono denotare le (II), (III) ridotte a diseguaglianze) sono sufficienti per un *minimo debole*, cioè per un minimo rispetto alle curve di cui non solo l'ordinata, ma anche l'inclinazione della tangente, è poco diversa; non lo sono per un *minimo forte*, ossia che deve essere tale rispetto a tutte le curve aventi l'ordinata poco differente. Per lo studio del minimo forte hanno fondamentale importanza il concetto di *campo d'estremali* (insieme d'infiniti archi d'estremali non aventi due a due alcun punto comune), e la formola:

$$\triangle J = \int_{x_1}^{x_2} E(x, \bar{y}; p, \bar{p})\, dx,$$

dove $\bar{y}$ e $\bar{p}$ sono l'ordinata e il coefficiente angolare della tangente della curva variata, ed E è la *funzione di Weierstrass*. Se ne deduce una 4.ª condizione necessaria, la *condizione di Weierstrass* (IV):

$$E(x, y; y^1, q) \geq 0 \text{ qualunque sia } q,$$

che comprende la (II). Una 5.ª condizione necessaria è dovuta allo stesso Bolza (V).

Sono sufficienti per un minimo forte le (I), (II'), (III'), e la (IV'_b):

Digitized by Google

$$E(x, y; p, q) > 0,$$

dove (x, y) è un punto qualunque d'un campo contenente l'estremale considerata, p il coefficiente angolare della tangente all'estremale del campo passante per quel punto, q un valore qualunque diverso da p.

Il Cap. 4 è una specie di digressione, interessante anche per se stessa, nella quale l'autore estende i concetti ed i teoremi fondamentali della teoria generale delle funzioni, riassunte in una breve appendice (p. 1*-10*), al caso in cui, invece dell'intorno d'un punto, debba considerarsi quello d'un insieme C di punti dello spazio ad n dimensioni; come tale si definisce l'insieme dei punti le cui coordinate differiscono dalle corrispondenti di almeno un punto di C per meno di una quantità arbitrariamente fissata. Citiamo come esempi il teorema d'esistenza delle funzioni implicite e quello degli integrali d'un sistema di equazioni differenziali.

Il Cap. 5 contiene l'esposizione del metodo di Weierstrass fondato sull'uso della rappresentazione parametrica delle curve. Stabilita la condizione perchè il valore dell'integrale:

$$\int_{t_2}^{t_1} F\,[x\,(t),\ y\,(t),\ x'\,(t),\ y'\,(H)]\,dt$$

sia indipendente dalla scelta del parametro, lo studio di questo integrale corre quasi parallelo a quello dell'integrale J. Notevoli sono le considerazioni che chiudono il capitolo, riguardanti l'estensione dei fondamenti del Calcolo delle variazioni alle curve non aventi tangente determinata.

Il Cap. 6 tratta estesamente il caso degli estremi variabili.

Nel Cap. 7 viene sviluppato il metodo di Kneser, che differisce da quello di Weierstrass, tra l'altro, perchè studia insieme il caso degli estremi fissi e quello di un estremo variabile sopra una curva fissa, e che è indipendente dalla considerazione della variazione seconda. Esso si basa sull'uso di certe coordinate curvilinee, che sono una generalizzazione delle coordinate geodetiche di Gauss.

Il Cap. 8 è dedicato alla teoria delle *soluzioni discontinue*, cioè alla ricerca di quelle curve a tangente discontinua che soddisfano alle condizioni di massimo o minimo. Un primo risultato fondamentale è questo: ogni soluzione discontinua consta di archi di estremali continue. Restano poi da stabilirsi le condizioni relative ai limiti e ai punti di discontinuità, che determinano completamente questi archi. Una classe di problemi che dànno luogo, in generale, a soluzioni discontinue, è quella dove le curve cercate devono essere contenute in una data parte del piano; allora però le soluzioni possono constare di archi d'estremali e di parti del contorno del campo dato.

Digitized by Google

Nel Cap. 9 è svolta la questione dell'esistenza di un estremo assoluto, questione che si connette strettamente col principio di Dirichlet. Il teorema d'esistenza è stato dimostrato, sotto certe condizioni restrittive, da Hilbert.

Il Cap. 10 tratta dei problemi isoperimetrici; lo studio di questi può ridursi a quello di problemi senza vincoli per quanto riguarda le condizioni (I), (II), (IV), ma non per quanto riguarda la condizione (III).

Nei Cap. 11 e 12 si considera il caso più generale in cui la funzione sotto il segno d'integrale contiene più funzioni incognite.

Infine il Cap. 13 espone gli elementi della teoria dei massimi e minimi degli integrali doppi, la quale attende ancora dagli sforzi degli analisti un più completo svolgimento.

Non piccolo pregio dell'opera di Bolza sono gli esempi sparsi in gran numero in tutto il libro, e i 165 interessanti esercizi raccolti alla fine di alcuni capitoli.

La presente opera è atta più di ogni altra a dare vigoroso impulso allo studio del Calcolo delle variazioni, e noi facciamo voti che essa venga largamente conosciuta anche nel nostro paese, il quale ha dato sinora troppo scarso contributo a questo ramo importante dell'Analisi.

G. Vivanti.

Didattica.

C. A. Laisant — *L'enseignement du calcul. Conseil aux instituteurs. 26 Figures dans le texte.* Paris, Hachette 1910, 8.° picc. p. 56 (Prezzo fr. 0.60).

L'A. continua con la presente pubblicazione la campagna contro sistemi educativi vieti ed irrazionali da lui intrapresa con la fortinatissima sua *Initiation mathémathique* (v. *Bollettino,* IX, 1906, p. 75-6); dopo dieci edizioni, che questa ha avute in quattro anni, dopo una traduzione italiana, che i nostri lettori conoscono *(Bollettino,* XI, 1908-09 p.21) le idee del Laisant si debbono ritenere abbastanza note senza che noi ci arrestiamo ad esporle. Ci limitiamo pertanto, a notare come, con il nuovo opuscolo che oggi annunciamo, egli ha porti nuovi esempi impressionanti della necessità di abbandonare alcuni metodi in uso nell'insegnamento dell'aritmetica ed ha dati ottimi suggerimenti per sostituirli con altri meglio rispondenti allo spirito dei tempi nostri. Nulla aggiungeremo per far rilevare l'arte spiegata dal-

Digitized by Google

l'A. per svegliare l'attenzione ed incatenare l'interesse de' suoi lettori, essendo questa una dote comune ai suoi scritti ed a cui certamente essi debbono il loro considerevole successo. Ma in un giornale d'indole storica, quale è questo *Bollettino*, non possiamo a meno di rilevare una sorprendente proposizione da lui enunciata (p. 40) e di chiedergliene le prove; dopo avere riferita una dimostrazione notissima della proprietà metrica caratteristica del triangolo rettangolo e di avere, a ragione, asserito che « c'est la plus simple et la meilleure des démonstration de cette proposition » egli aggiunge: « C'est la plus vieille aussi qu'on en connaisse; elle précède de bien de siècles la naissance de Pythagore, à qui le carré de l'hypotenuse est souvent attribuè à tort ».

G. L.

W. Killing und H. Hovenstadt — *Handbuch des matematischen Unterrichts.* I Band mit 32 Figuren in Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1910. 8.° p. VIII-456. (Prezzo del vol. leg. Mk. 10).

Benchè alcuni pochi ritengano ancora che la via maestra per giungere a conoscere le verità geometriche sia quella che ha insegnata Euclide coi suoi *Elementi,* pure chi conosce nel suo insieme la letteratura geometrica deve riconoscere che in quest'ultimo secolo la scienza dell'estensione si è arricchita di molti principi profondamente riformatori, ond'è naturale il lamento che questi non abbiano ancora esercitata sull'insegnamento tutta la benefica influenza di cui è ragionevole ritenerli capaci. A conferma di ciò basta ricordare le profonde osservazioni del Möbius sopra i segni delle figure, delle aree e dei volumi e le fondamentali ricerche dell'Hilbert sopra le basi della geometria. Diffondere siffatte idee fra gli insegnanti secondari, ecco il nobile scopo che si prefissero gli autori del volume che annunziamo! L'opportunità di uno scritto siffatto non ha bisogno di essere dimostrata, non foss'altro perchè mai quanto nell'ora presente il mondo che pensa si è interessato alle questioni che toccano i metodi d'insegnamento, mai come oggi fu più netta la divisione di tutti coloro che si occupano di questioni metodologiche in due classi, dei « riformisti » l'una, l'altra dei « conservatori ».

Il volume in discorso consta di due parti.

La I ha per iscopo di porgere i mezzi per orientarsi a chi vuol conoscere a fondo l'insieme delle questioni relative ai fondamenti della geometria e contiene dieci paragrafi intitolati

Digitized by Google

come segue: 1. Gli assiomi. 2. Geometria euclidea e geometria non-euclidea. 3. I concetti fondamentali. 4. I concetti di « a destra » ed « a sinistra » nel piano. Teoria dei poligoni. 5. Area delle figure piane. 6. I concetti di « a destra » ed « a sinistra » nello spazio. Teoria dei poliedri. 7. Volume dei corpi, in particolare dei poliedri. 8. Le figure improprie del piano. 9. Problemi di costruzione nel piano (1). 10. Della logica geometrica.

La II parte concerne invece la geometria scolastica e tratta in quattordici paragrafi i seguenti argomenti: 11. Osservazioni linguistiche concernenti l'insegnamento matematico. 12. Sull'insegnamento della geometria elementare. 13. Prima parte della teoria dei triangoli. 14. Teoria delle parallele. 15. Teorica elementare del cerchio. 16. Teoria dell'equivalenza. 17. Le proporzioni in geometria; teoria degli irrazionali. 18. Teoria della similitudine. 12. Misura del cerchio. 20. Rapporti sezionali e doppi rapporti. 21. Punti e raggi armonici. Poli e polari rispetto al cerchio. 22. Potenza rispetto al cerchio. Fasci e reti di cerchi. 23 Inversione nel piano. 24. Il problema di Apollonio.

Gli autori, come è ben naturale, si sono giovati dei lavori dei loro predecessori, limitandosi però, se non c'inganniamo, agli scritti tedeschi o che furono già tradotti in tale lingua; onde non devono stupire dei punti di contatto dell'opera presente con altre anteriori ben note (2). Certamente alcune delle opinioni manifestate dagli autori non troveranno tutti consenzienti; ma le discussioni che provocheranno riusciranno senza dubbio utili alla scienza ed alla scuola. A tali discussioni chi scrive non intende partecipare, facendo a lui difetto la competenza che proviene dalla consuetudine con scolaresche di adolescenti.

G. L.

---

(1) Notiamo in questo paragrafo una succinta ma lucida esposizione della geometrografia del Lemoine e delle sue varie trasfigurazioni.

(2) Sia lecito rilevare come a pag. 40 gli Autori pronuncino un giudizio assai severo sopra un articolo dell'*Encyklopädie der math. Wissenschaften*, senza però indicare neppur uno dei « considerando » della loro sentenza, sistema questo che ci sembra da disapprovarsi come quello che rende impossibile ogni difesa e spegne ogni discussione.

Digitized by Google

Berichte und Mittheilungen veranlasst durch die internationale Unterrichtskemmission. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. IV (1910; prezzo Mk. 0.50), V (1911; Mk. 0.60), VI (1911, Mk. 0.50).

W. Lietzmann, *Bericht über die Tätigkeit des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwisselschaftlichen Unierrieht in Jahre 1910.* Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1911 (p. 26, Mk. 0.60).

La natura di queste pubblicazioni è tale che analizzarle è impossibile; basti il segnalarle a coloro che s' interessano a seguire gli studi che in Germania assiduamente si compiono sopra le riforme da apportarsi alla organizzazione dell' insegnamento delle scienze nelle scuole medie.

G. L.

Alois Höfler — *Didaktik des mathematischen Unterrichts,* Leipzig, Teubner 1910 8.° gr., p. 509+XVIII (Prezzo Mk. 10).

È il primo volume dei « didaktische Handbucher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen in zehn banden » pubblicati da Höfler e Poske colla collaborazione di varii professori.

L' opera, che è preceduta da una introduzione storica e bibliografica, si divide in tre parti: 1.ª Scopi e metodi dell' insegnamento della matematica; 2.ª Saggi di lezioni, loro procedimenti, programmi; 3.ª Questioni eccedenti la didattica della matematica, od al confine di essa colla psicologia, colla teoria della conoscenza e colla didattica generale quale teoria della formazione.

Diremo brevemente di ciascuna di queste parti.

La prima espone succintamente i concetti fondamentali, che secondo l'A. devono informare ogni insegnamento della matematica, e che informano anche lo svolgimento delle altre due parti del libro. Premesso che lo scopo principale dell' insegnamento deve essere l' informativo, fissa come limite superiore di esso nelle scuole secondarie il concetto di funzione: ad esso si deve mirare durante tutto il corso secondario. In conformità al criterio: il concreto avanti dell' astratto, il particolare avanti del generale, non si devono affaticare le menti colle astrazioni della matematica pura, ma a questa si deve arrivare salendo a poco a poco dalla matematica applicata. L' A. deduce da ciò, che negli ultimi corsi delle scuole secondarie si debbono introdurre « dei calcoli superiori » quelli necessarii per la maggior parte

Digitized by Google

delle applicazioni. Discusse alcune delle solite questioni generali di didattica, l'A. avverte che i programmi stabiliti in seguito sono basati sull' ipotesi di un corso di 8 anni, con tre ore settimanali per ciascun anno, e che la materia è divisa in modo da avere alla fine di ogni anno un insieme compiuto. Infine avverte, che, affinchè i programmi non siano applicabili solo in Austria (l'A. è Prof. nell'Univ. di Vienna) sia nei consigli riguardanti il modo di esporre, sia nella divisione della materia, egli si è regolato sopratutto sull' età dei discenti, che suppone sia in media di 10 anni al principio del corso secondario. Allo stesso scopo per ciascuna teoria si è limitato ad indicare il modo più conveniente per introdurla, senza poi fermarsi sullo svolgimento ulteriore di essa, che dipende da varie condizioni di orario o di altro.

Nella 2.ª parte l'A. prende a considerare più particolarmente i metodi ed i programmi dell' insegnamento, che divide in tre cicli: inferiore di 3 anni, medio di 2, e superiore di 3. Per ognuno di questi cicli stabilisce i criterii fondamentali sia per la scelta della materia, che per il modo di svolgerla; poi per ciascuna parte prende ad esaminare i punti più difficili, e su essi dà consigli varii, mostrando spesso anche con esempii di lezioni come si debbano svolgere. Termina con un programma che avrei riportato molto volentieri, se non fossero ragioni di spazio, e che riassume in modo sintetico quanto è stato detto avanti in proposito.

Fa seguito un' appendice nella quale vien discussa la quetione importantissima dell' introduzione di calcoli superiori negli ultimi corsi, introduzione a cui l'A. si mostra completamente favorevole, sia perchè essa facilita le applicazioni pratiche, sia perchè in gran parte quel che egli vorrebbe introdotto nella scuola media vi è già trattato, sia pure in forma imprecisa e con altro nome. Secondo lui, almeno, occorrerebbe introdurre il concetto di derivata, naturalmente nei casi più semplici, per poter trattare in modo conveniente sia delle tangenti, come delle velocità, accelerazioni ecc.; anzi questo concetto dovrebbe prendere le mosse da esempii concreti di queste applicazioni, ed anche in seguito si dovrebbe riportarsi sempre ad esse. Quanto all' integrale, l'A. crede che si dovrebbe parlarne nelle scuole medie limitandosi però agli integrali definiti, senza considerarlo come operazione inversa della derivazione; così si potrebbero raccogliere in un metodo generale tanti artificiosi processi di calcolo, di cui cita parecchi esempii.

Infine la terza parte tratta di varie questioni ;mi limiterò a darne l' indice:

Digitized by Google

1.° I fondamenti psicologici (ed obbiettivi) del pensiero matematico: *a)* Rappresentazione dei numeri; *b)* Rappresentazione dello spazio. — 2.° Dalla teoria della conoscenza. — 3.° La logica formale nell' insegnamento della matematica. — 4.° Della didattica generale quale teoria della formazione. — 5.° L' insegnamento della matematica, in relazione all' insegnamento del modo di parlare, scrivere, disegnare Perspicacia ed abilità pratica. — 6.° Formazione matematica e formazione generale.

Mi resta da dire il mio pensiero su quest' opera. Francamente devo dire che la terza parte non mi soddisfa: l'A. avrebbe potuto anche risparmiarsi di trattare molte delle questioni, che vi accenna, ma trattandole non doveva limitarsi a sfiorarle, come fa. Invece ottime mi sembrano le due parti precedenti: per le condizioni dei nostri orarii e dei nostri programmi attuali, molto differenti da quelle su cui si è basato l'A., alcune parti non corrispondono a quel che occorre in Italia, ma una gran parte di quello che nel libro è esposto vale anche per le nostre scuole, e quindi il libro riuscirà d' incontestata utilità anche da noi. Le proposte che l'A. presenta in gran numero, i metodi che egli propone sono certo frutto d' ingegnoso e coscienzioso studio, e di una gran pratica della scuola: questo, pur non dividendo tutta la fiducia che l'A. mostra a riguardo di alcuni metodi. Per es. io pure credo utile l' uso della carta millimetrata e delle rappresentazioni grafiche, ma non riesco a persuadermi, che essa possa portare tutti i vantaggi, che l'A. se ne ripromette. Particolarmente importanti sono i saggi di lezioni e gli schizzi, che egli fa di parti della materia: saggi e schizzi che però non bisogna prendere troppo alla lettera. Benissimo trattata ed in modo convincente la questione dei « calcoli superiori nelle scuole superiori »: per parte mia non posso non sottoscrivere alle conclusioni.

Siro Medici.

Curve piane.

G. Loria. — *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte.* Autorisierte, nach dem italienischea Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von F. Schütte. Zweite Auflage. Leipzig uud Berlin, B. G. Teubner. 8°. Vol. I, 1910: XVIII+488 p. e 14 tavole. Vol. II, 1911: VIII+384 p. e 6 tavole (Prezzo dei vol. leg. Mk. 18 e 14).

Quest' opera poderosa, di cui fu fatta un' estesa recensione nel *Bollettino* (VI, 1903, p. 5-13), ha avuto il successo che me-

Digitized by Google

rita; sono trascorsi soli otto anni dalla sua pubblicazione, ed il bisogno di una nuova edizione si è già fatto sentire. Anche a questa l'autore dedicò la maggior cura, introducendovi tutti i nuovi risultati ottenuti negli ultimi anni nonchè quelli di data anteriore che erano sfuggiti alle sue pazienti indagini nella redazione primitiva, tenendo conto delle piccolissime mende rilevate nel suo lavoro dalla critica, aumentando notevolmente il numero delle figure. Il piano dell'opera non poteva evidentemente essere variato; anzi una gran parte di essa non era suscettibile di mutamenti radicali; ma i ritocchi sono numerosissimi. La modificazione più importante è quella apportata alla Parte IV *(Curve d'ordine superiore al quarto)*, dove ha trovato posto la teoria generale delle curve del quinto e del sesto ordine. Sono pure da notarsi le modificazioni relative alla versiera (art. 44), ad una proprietà meccanica della lemniscata (art. 96), al ramo punteggiato discontinuo della logaritmica (art. 224), alle podarie (art. 270); e le aggiunte riguardanti le curve di Lamé (art. 124), la trisecante di Delanges (art. 152), le curve connesse colla teoria dei numeri complessi (art. 164), le spirali sinusoidi (art. 172), la cocleoide (art. 182), la cardioide (art. 210), le curve che ammettono proiezioni simili (art. 224), la curva di von Koch (art. 226), la trattrice del cerchio (art. 232), le *Laufmustekurven* (art. 237), le evolute parziali (arc. 257), le curve parallole (art. 263), le radiali (art. 266), certe curve derivate (art. 283), le curve dedotte da un gruppo di curve (art. 285-286).

G. Vivanti.

E. Beutel. — *Algebraische Kurven.* I Teil: *Kurvendiskussion.* Mit 57 Figuren in Text (1909) p. 147). II Teill: *Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung.* Mit 57 Figuren im Text (1911) p. 135). Leipzig, G. J. Goeschen. (Prezzo di ogni volumetto Mk. 0.80).

Nell'ultimo qnarto del secolo XIX la letteratura matematica non si arrichì di alcuna nuova esposizione della teoria generale delle curve piane: la trattazione sintetica del Cremona, quella mista del Salmo e quella analitica del Clebsch-Lindemann sembravano soddisfare le esigenze di tutti. Ma, col nuovo secolo, la sistematizzazione delle ricerche sparse intorno alle curve spociali da un lato e d'altro lato la preparazione degli articoli sopra l'argomento per la grande Enciclopedia matematica tedesca, risvegliarono l'interesse per quella disciplina e produssero nuovi trattati, di cui il *Bollettino* non ha mancato di render conto. Ad essi uno nuovo ne aggiunge ora E. Beutel, con questi due

Digitized by Google

nuovi elementi (n. 435 e n. 436 della *Samınlung Göschen*). Data la limitazione dello spazio di cui disponeva, egli non ha potuto esaurire il vasto argomento, ma ha saputo condensare in poche pagine un gran numero di cose utili ed interessanti. Nel I dei volumi in questione egli espone molto chiaramente tutto quanto serve a discutere una curva di cui si conosca l' equazione cartesiana, illustrando i metodi insegnati sopra molti esempi ed invitando il lettore a fare altrettanto per un gran numero di altre curve, di cui dà l' equazione; nè manca di dire qualchecosa intorno al problema inverso, di determinare, cioè, la equazione di una curva di cui si conosca la forma generale, problema indeterminato ma di cui spesso si ha bisogno di cono scere almeno una soluzione. Il II volume consta di due parti ben distinte; in una sono stabilite tutte le proprietà delle curve algebriche che derivano dalla teoria delle polari, fino a stabilire le proposizioni fondamentali sopra le singolarità superiori delle curve piane; nell' altra sono enumerate e studiate le curve del III e del IV ordine. Crescono pregio alla trattazione le molte e belle figure che la illustrano.

G. L.

Raccolte di Esercizi.

F. Dingeldey. — *Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential - und Integralrechnung.* I Teil: *Bufgaben zur Anwendung der Differentialrechnung.* Mit 99 Figuren im Text. Leipzig und Berlin G. B. Teubner, 1910. 8.° gr. p. IV+ 202 (Prezzo del vol. leg. Mk. 6).

Quale sia lo scopo che l'A. si propone e quali siano i mezzi da lui usati è chiaramente dichiarato dal seguente brano della Prefazione:

« Le raccolte di problemi sopra il calcolo differenziale ed integrale che furono finora pubblicate contengono esercizi per lo più tolti dalla geometria, mentre non trattano se non pochi esempi offerti dalla fisica e nessuno attinto dalla tecnica. I libri di A. Fuhrmann consacrati alle *Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenscafhten, im Hochbau und in der Technick*, toccano certamente molti problemi di pertinenza delle scienze naturali e della tecnica, ma le varie parti di quest'opera rivestono piuttosto il carattere di un trattato che quello di una raccolta di problemi. Inoltre tale opera è rimasta incompiuta, non essendo apparse le applicazioni del calcolo infinitesimale alle macchine. Anche l' egregia opera di John Perry *The calcul*

Digitized by Google

for engineers è, in tesi generale, un trattato delle applicazioni del calcolo infinitesimale alla tecnica. Altrettanto dicasi di J. W. Mellor *Higher mathematics for studente of chemistry and physics*, opera, d'altronde, che, come dice il titolo, tratta soltanto di scienze naturali.

Perciò mi sembrò mancasse un libro che fosse una raccolta di esempi tratti dalla geometria, dalle scienze naturali e dalla tecnica. Il presente scritto è un tentativo per colmare tale lacuna. Nel redigerlo io mi sono sforzato di presentare soltanto esempi geometrici capaci di destare l'interesse di fisici e tecnici, mentre è probabile che lo studente di matematica pura s'interessi a siffatti esempi, essendo questi scelti in modo da non esigere per la loro intelligenza speciali cognizioni; ove queste apparvero desiderabili, vennero date le necessarie spiegazioni.

Il libro contiene, non soltanto gli enunciati, ma anche le corrispondenti soluzioni e per molti problemi, più o meno estesamente, tutti gli schiarimenti che guidano alle soluzioni stesse. Al principio di ciascun paragrafo si trovano compendiate le proposizioni e le regole ivi applicate; ma non si trovano dimostrazioni, perchè questo libro non è un trattato. Mi sono sforzato di soddisfare le esigenze del rigore matematico; ma mi parve estraneo al mio scopo l'addentrarmi in teorie superiori. Le notizie bibliografiche apposte a parecchi problemi vennero introdotte con lo scopo di svegliare nel lettore il desiderio di studiare le memorie citate ».

Emerge da ciò che l'opera del Prof. Dingeldey soddisfa un bisogno, avvertito non soltanto in Germania, ma anche da noi, specialmente dopo che si accrebbe il numero dei politecnici completi e che si va sempre più accentuando la tendenza al totale distacco di tali scuole delle università. Ci sembra, quindi, che una traduzione dell'opera del Dingeldey sarebbe opera meritoria, alla quale per fermo non mancherebbero il plauso generale ed il successo librario. Che il piano dello scritto ora annunciato concordi col programma consueto dei nostri corsi universitari di calcolo differenziale risulta dal seguente indice, che riferiamo a mo' di chiusa del presente cenno:

1. Regole generali. Differenziazione di potenze.
2. Differenziazione di funzioni esponenziali e logaritmiche.
3. Differenziazione delle funzioni trigonometriche dirette ed inverse.
4. Derivate successive.
5. Funzioni di più variabili; differenziali totali.
6. Funzioni implicite. Due variabili come funzioni d'un parametro.

Digitized by Google

7, Cambiamento di variabili.
8. Tangenti e normali delle curve piane. Piani tangenti e rette normali delle superficie.
9. Angolo sotto cui tagliansi due curve.
10. Podarie.
11. Suttangente e sunnormale; lunghezza di tangenti e normali.
12. Forme indeterminate.
13. Serie infinite.
14. Concavità e convessità; flessi.
15. Punti singolari delle curve piane.
16. Asintoti delle curve piane.
17. Massimi e minimi.
18. Contatti di ordini superiore. Cerchi di curvatura ed evolute.
19. Inviluppi di curve piane e di superficie.
20. Esempi di discussione di curve.

G. L.

E. Fabry — *Problèmes et exercises de mathématiques générales.* 8.° gr. p. 420. Paris; Hermann 1910. (Prezzo fr. 10).

L'A. della presente raccolta di esercizi ha pubblicato qualche anno fa un *Traité de mathématiques générales à l' usage des chimistes, ingénieurs et physiciens et des élèves des Facultés des sciences,* il quale fu giudicato da tutti in modo assai lusinghiero. Con la pubblicazione che oggi annunciamo egli ha voluto e saputo darvi un complemento utilissimo, inspirato al sano concetto che i teoremi e le formole matematiche non possono assimilarsi se non se ne fanno molteplici applicazioni a svariati problemi. Quali siano gli argomeuti trattati nel nuovo volume si desume dal seguente *Indice*:

Parte I. Algebra. 1 Numeri incommensurabili, limiti, continuità. 2. Radicali, formola del binomio. 3 Determinanti. 4. Serie. 5. Funzione esponenziale. Logaritmi, 6. Derivate. 7. Applicazione delle derivate. 8. Sviluppi in serie. 9. Funzioni a più variabili. 10. Immaginari. 11. Equazioni algebriche. 12. Radici reali. 13. Radici incommensurabili. Equazioni cubiche. 14. Frazioni razionali. Eliminazione. 15. Interpolazione.

Parte II. — Geometria analitica. 1. Nozioni fondamentali. 2. Linea retta. 3. Luoghi geometrici. 4. Punti multipli Asintoti. 5. Curve di second' ordine. 6. Diametri conjugati. Fuochi. 7. Intersezioni. Polari. 8. Coordinate polari. Curve unicursali. 9. Inviluppi. Curvatura. 10. Coordinate nello spazio. 11. Piano. Retta.

Digitized by Google

12. Generazione delle superficie. 13. Superficie di second'ordine. 14. Intersezioni. 15. Sezioni circolari. Coni circoscritti. 16. Inviluppi. Curvatura.

Parte III. 1. Derivate. 2. Integrali. 3. Integrali definiti. Superficie. 4. Applicazioni. 5. Volumi e superficie. 6. Integrali curvilinei. 7. Integrali di superficie. 8. Equazioni differenziali. 9. Equazioni a derivate parziali. 10. Questioni generali d'analisi e di geometria analitica.

Parte IV. Meccanica. 1. Cinematica. 2. Dinamica del punto libero. 3. Dinamica del punto vincolato. 4. Statica. 5. Centri di gravità. 6. Dinamica dei sistemi. 7. Problemi generali.

La varietà delle questioni trattate (il cui complesso raggiunge il rispettabile numero di 739), alcune delle quali vennero proposte in pubblici esemi, risulta da questo indice. Le soluzioni sono indicate in modo conciso, ma chiaro (1). Onde tutto sommato si ha un' opera che, mentre conferma l' abilità didattica dell'A., riuscirà di grande utilità agli studenti, e non soltanto a quelli delle Università francesi, ai quali precipuamente si dirige.

G. L.

Attualità.

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachegnossen gerausgegeben von F. AUERBACH und R. RHOTE. *Mit einem Bildniss Hermann Minkowskis. 2. Jahrgang. 1911.* Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1911. 8.° picc. p. IX+567 (Prezzo del vol. leg. Mk. 7).

I compilatori di questo volume constatano nella Prefazione che pubblico e critica furono d'accordo nel riconoscere che la presente pubblicazione corrisponde ad un vero bisogno degli studiosi; essa, quindi. è destinata a venire continuata. Senza ripetere quanto osservammo allorchè comparve il I Volume (cfr. *Bollettino* T. XI, p. 88), osserviamo che il II si apre con una breve ma profonda biografia del Minkowski, dovuta a D. Hilbert e H. Weyl, ove sono poste in bella luce le straordinarie benemerenze del compianto scienziato. Dopo il Calendario astronomico per l' anno 1911, seguono gli articoli concernenti vari

(1) Vennero anche pubblicati a parte i soli enunciati (*Problèmes et exercises de mathématiques générales, Enoncés.* Paris, Hermann, 1910, pag. 82; fr. 2).

Digitized by Google

rami della matematica, della fisica e della chimica; un' analisi essendone impossibile, ci limitiamo a segnalare gli argomenti toccati:

ASTRONOMIA. Determinazione delle trajettorie delle comete e dei pianeti.

TAVOLE NUMERICHE. Logaritmi a quattro decimali dei numeri da 1 a 1000. Funzioni trigonometriche. Funzioni iperboliche. Tavole di quadrati. Funzioni di Bessel. Funzioni sferiche. Funzione esponenziale.

MATEMATICA. *Aritmetica ed Algebra.* Fondamenti dell'aritmetica. Teoria degli insiemi. Analisi combinatoria. Determinati. Forme bilineari e quadratiche. Teoria degli invarianti. Equazioni algebriche. Numeri e corpi algebrici. Teoria dei gruppi. Serie finite. Serie e prodotti infiniti. Teoria dei numeri. Numeri algebrici interi. L' ultimo teorema di Fermat. Numeri trascendenti.

Analisi: Fondamenti. Calcolo differenziale. Calcolo integrale. Integrali definiti. Calcolo delle variazioni. Equazioni differenziali ordinarie. Equazioni a derivate parziali. Equazioni integrali. Funzioni di una variabile complessa. Funzioni particolari. Integrali e funzioni ellittiche. Funzioni sferiche. Funzioni di Bessel. Serie di Fourier.

Geometria: Fondamenti. Geometria del triangolo. Geometria del cerchio. Costruzioni geometriche elementari. Stereometria. Trigonometria piana e sferica. Geometria non euclidea. Projettività, involuzione, affinità. Geometria analitica del punto, della retta e del piano. Coniche. Quadriche. Generalità sulle curve piane algebriche. Curve di terzo ordine. Generalità sopra le curve e le superficie algebriche; curve e superficie speciali. Geometria differenziale piana. Curve piane speciali. Curve gobbe e sviluppabili. Teoria delle superficie.

Matematica applicata. Probabilità. Calcolo degli errori. Calcolo delle differenze ed interpolazione. Quadratura meccanica. Attuaria. Analisi vettoriale.

Insegnamento.

MECCANICA. *Statica.* Geometria delle forze. Teoria dell'equilibrio. Statica grafica.

Cinematica. Teoria geometrica del movimento. Tempo. Moto relativo. Movimento semplice.

Dinamica. Il centro di gravità. Principi della dinamica. Moto ritenuto. Il corpo rigido.

Teoria del potenziale.

FISICA. La teoria della relatività. Fisica della materia. Suono. Calore. Elettricità e magnetismo. Luce. Radioattività.

Digitized by Google

ELETTROTECNICA.
CHIMICA GENERALE.

Le ultime pagine del volume contengono un elenco di pubblicazioni periodiche fisico-matematiche ed uno di libri recenti; segue una lista di scienziati morti nell'anno, con brevissimi cenni bibliografici, una serie d'indirizzi, ecc.

Siasi lecito, finendo, di fare un'osservazione e di esprimere un desiderio. Ogni volume della collezione iniziata fa sistema con gli altri, in quanto ciascuno contiene la trattazione di soli alcuni argomenti scientifici; sarebbe utile, percorrendo ogni volume sapere quali argomenti furono già svolti nella collezione; onde sarebbe bene che ogni volume contenesse un'indice metodico completo di tutti i temi già trattati nel volume stesso e nei precedenti. E' questa una aggiunta piccola di mole, ma la cui utilità sarà per aumentare in ragione diretta del numero dei termini della serie così brillantemente cominciata.

G. L.

E. Lebon. — *Savants du jour. Paul Appell. Biographie, bibliographie analytique des écrits.* Paris, Gauthier-Villars, 10 Novembre 1910, 8.° gr. p. VIII+71 (Prezzo fr. 7).

Il Sig. Lebon prosegue con ammirabile operosità nel compito che si è proposto. Questo nuovo elemento della collana di biografie da lui intrapresa è redatto sopra l'identico piano adottato per i precedanti. Il soggetto da lui preso a considerare è l'illustre professore di meccanica razionale alla Sorbona, nato a Strassburgo il 27 Settembre 1855, e le cui svariate pubblicazioni ascendevano, sullo scorcio del 1910, a 306. Malgrado la diligenza spiegata dall'autore qualche inesattezza è incorsa nel ricordare le recenzioni pubblicate in questo *Bollettino,* tutte dovute, non al Direttore, ma al Prof. Marcolongo, ed inserite nei Vol. IX (p. 22-24) e X (p. 51).

G. L.

Rassegna delle recenti dissertazioni di laurea

Herman L. Losbin. — *On plane Quintic Curves.* Diss. Clark University (Worcester Mass.) Juni 1908.

I punti d'inflessione d'una curva algebrica d'ordine superiore a 3 formano una configurazione, per fermo dotata di proprietà interessanti, ma che sono, sino ad oggi, completamente

Digitized by Google

sconosciute. Nel 1875 J. Grassman, nella sua dissertazione di laurea, credette (in base ad una numerazione di costanti) dimostrare che « se per $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ punti di inflessione di una curva d'ordine n si fa passare una curva dell'ordine $n-2$ essa segherà la data in altri $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ flessi della prima ». Ma, sino dal 1876, F. Klein notò che tale teorema, valido per $n=3$, cessa di esserlo già per $n=4$. Ora nel lavoro che annunziamo l'A. prova la fallacia di quel teorema nel caso $n=5$ e coglie l'occasione per esporre delle considerazioni topologiche sopra le quintiche, che dovranno venire ricordate da chi accingerà a darci la desiderata monografia completa di ciò che si conosce intorno a queste notevoli figure.

J. Luterbacher. — *Die Verfolgungskurven einer Geraden.* Inaugural-Dissertation, Bern 1909.

Questo nuovo contributo alla ricca letteratura sopra le curve di fuga relative ad una retta contiene anzitutto un nuovo procedimento per integrarne l'equazione differenziale, che l'A. apprese dalle lezioni del Prof. G. Huber. La risultante forma dell'equazione in termini finiti delle curve in discorso permette all'A. di risolvere le principali questioni metriche (rettificazione, quadratura, cubatura, ecc.) che ad esse si riferiscono, ed anche di fare delle stesse un accurato studio dal punto di vista topologico, cosa che non era ancora stata fatta (per quanto ci consta) e che meritava di esserlo; i risultati di tale studio sono consacrati in parecchie riuscitissime figure, che accrescono il pregio del presente scritto.

Grete Kahn. — *Eine allgemeine Methode zur Untersnchung der Gestalten algebraischer Kurven.* Diss. Göttingen 1909.

Clara Löbenstein. — *Ueber den Satz, dass eine ebene, algebraische Kurve 6. Ordnung mit 11 sich einander ausschliessende Ovalen nicht existrirt.* Diss. Göttingen 1910.

Queste due memorie contengono l'esposizione e l'applicazione di un metodo immaginato da D. Hilbert per studiare la topologia delle curve algebriche piane. Sono generalmente noti gli importanti risultati da lui ottenuti anche in questo campo sin dal 1891; è pur noto che egli allora aveva affermato che « esistono curve di 6.° ordine costituite da undici ovali, ma che di queste due almeno debbono essere una interna all'altra »;

Digitized by Google

orbene tale teorema, che finora era stato soltanto verificato empiricamente, è, dopo la pubblloazione delle due annunciate Dissertazioni, completamente dimostrato. L'importanza di esso risulta dalla nota dell' Hilbert *Uber die Gestalt einer Flächer 4ter Ordnung* (Götting. Nachr. 1909) ove di esso è fatta una importante applicazione alla topologia delle superficie di quart' ordine.

C. Pfistner. — *Die einem homogenen linearen Differentialgleichungessysteme zugeordnetem Systeme.* Inauguraldiss. Freiburg i. Br, 1910.

È noto che ad una data equazione differenziale lineare omogenea se ne possono connettere altre i cui integrali stanno in una relazione assegnata con quelli della data (si pensi ad es. alle equazioni differenziali aggiunte ed associate alla data). In modo simile si può collegare ad un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee altri sistemi (v. Schlesinger in Journal f. d. r. u. a. M. T. CXXVIII, p. 295). Ora, scopo del presente scritto è di mostrare come si possano generalizzare siffatte relazioni, servendosi dei risultati ottenuti da A. Loewy (Trans. of the Amer. math. Society T. V., p. 61). Ivi sono effettivamente assegnati alcuni sistemi collegati ad un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee e da ultimo sono stabilite alcune proposizioni generali concernente la connessione esistente fra tali sistemi.

H. Fluekiger. — *Die Flächenteilung des Dreiecks mit Hilfe der Hyperbel (mit drei Tafeln)* Inaugural-Dissertation. Bern 1910.

È noto (e d'altronde si dimostra agevolmente) che per un punto qualunque di un lato di un dato triangolo si può condurre una retta che divida l' area del triangolo in due parti aventi fra loro un dato rapporto. Se quel punto percorre quel lato del triangolo, tale secante inviluppa un' iperbola. Considerandone ogni lato del triangolo si hanno in tutto sei iperbole, il cui studio, nelle loro scambievoli relazioni, è lo scopo del presente lavoro.

P. Huber. — *Die Scyphoide eine Kurve 4, Ordnung.* Inaugural-Dissertation, Bern 1910.

Dato un sistema di assi cartesiani Ox e Oy ed un punto A del primo, si conduce per A una retta qualunque a segare Oy in C; la circonferenza di centro C e raggio OC è tagliata dalla perpendicolare innalzata da C alla retta AC in due punti

Digitized by Google

il cui luogo geometrico è la curva studiata nel presente lavoro. E' una curva del quart' ordine e della quinta classe, avente in O un punto triplo e passante pei punti ciclici del piano; da ciascuno di questi si possono, quindi, condurre *tre* rette tangenti altrove la curva, onde le osservazioni fatte dall' A. nella chiusa (p. 51) ci sembrano esigere qualche ritocco, basandosi esse sulla supposizione che tali tangenti siano in numero di *cinque*. Della scifoide l'A. stabilisce l' equazione cartesiana e l' equazione polare, la rappresentazione pasametrica e l'equazione tangenziale. Determina ancora l' equazioue della tangente e la quadratura; studia inoltre il sistema delle curve polari, soffermandosi a considerare le cubiche, le coniche e le rette polari di punti speciali del piano.

Il lavoro discorso è adorno di parecchie figure eseguite con molta cura.

O. Werner. — *Zur Physik Leonardo da Vincis.* Inaugural-Diss. Erlangen 1910.

Raccomandiamo vivamente questo esteso e coscienzioso lavoro a tutti i cultori degli studi vinciani; in esso si trovano accuratamente adunati e studiati i contribuli dati alla fisica dal gran Leonardo, tenendo il debito conto dell' estesa letteratura sull' argomento. Eseguito sotto la direzione del Prof. E. Wiedemann, fa onore al maestro quanto al discepolo.

G. L.

Notizie.

Junius Massau, l' eminente matematico spentosi a Gand il 10 Febbraio 1909, era nato a Gosselies (Belgio) il 9 Aprile 1852. Le numerose ed importanti sue pubblicazioni intorno all' integrazione meccanica ed altre questioni connesse, gli valsero il premio quinquennale del governo belga per il periodo 1889-1893 e nel 1906 il premio Wilde da parte dell' Istituto di Francia. Per lunghi anni professore di meccanica razionale, contribuì validamente al perfezionamento ed alla diffusione dei metodi di analisi vettoriale; anzi J. Rose, che ne fu discepolo e che ne ha tessuto recentemente un' elogio eccellente *(L' enseignement mathématique* del 15 Maggio 1910), ritiene che le idee del Massau non furono abbastanza apprezzate dai cultori del calcolo geometrico: ciò indubbiamente proviene dal fatto che esse furono udite dai discepoli del Massau e conosciute soltanto da coloro che poterono leggerne le lezioni litografate: sicchè la modestia dell' autore, sconsigliandolo dal far stampare tali lezioni, fu

Digitized by Google

dannosa non solo alla rinomanza di lui, ma anche al progresso della scienza.

***

Un'altra Società matematica fu fondata in Ispagna. Ne è organo un periodico dal titolo *Revista de la Sociedad Matematica Espanola (Analisis, Geometria, Mecanica, Astronomia, Fisica Matematica, Geodesia, Historia, Pedagogia* ecc.), destinata a contenere in ogni puntata svariate rubriche. Una è di natura biografica: ed infatti i n. 1 e 2 della *Revista* contengono schizzi biografici di Fermat (con ritratto) e di Nunez; analoga ad essa è una sezione storica, ove si vorrebbero riunire notizie esatte sopra le opere di matematica che comparvero in Ispagna, collo scopo di adunare gli elementi per una futura storia delle matematiche nella terra del Cervantes. Un'altra sezione della *Revista* è destinata ad accogliere memorie originali: e tali sono quelle finora uscite di E. Terradas *(Sopra la figura geometrica generata dal moto stazionario di un filo)*, J. Rey *(Sopra la sommazione delle serie)*, C. J. Rueda *(Sul numero dei poligoni semi-regolasi)*. E. L. Ortiz *(Sopra l' arco di un meridiano ellittico)* e M. Vegas *(Generalizzazione del circolo dei nove punti)*. Oltre a molte notizie di cronaca, la *Revista* contiene una rubrica-intermediario destinata a raccogliere domande e risposte sopra argomenti dottrinali e storici attinenti alle scienze esatte ed ancora una serie di problemi proposti e risolti. Finalmente essa proponesi di raccogliere e coordinare tutti i contributi che le saranno inviati per formare un *Vocabolario matematico;* chi sa quali e quanti inconvenienti provengano dal non preciso significato di molti termini tecnici e dall' essere uno stesso vocabolo usato da autori differenti con significati diversi, comprenderà di leggieri l'importanza che possiede questa originalissima rubrica. Da queste notizie emerge con quanto senno ed elevatezza di idee sia stato redatto il piano di questo nuovo giornale di matematica; onde non vi è che da augurare che esso continui così brillantemente come ha cominciato.

***

Congresso Scientifico Internazionale Americano. — In questa riunione, organizzata dalla Sociedad cientifica americana pei giorni 10-25 Luglio 1910, i temi proposti nella Sezione matematica furono i seguenti:

I. Notazioni razionali nel sistema vettoriale.

II. Sistema di notazione matematica in generale e specialmente per la geometria proiettiva e descrittiva, pura ed applicata, da usarsi nella lingua castigliana.

III. Convenienza della fusione nell' insegnameneo secon-

Digitized by Google

dario della geometria piana con la solida ed uso possibile del principio di dualità.

IV. Piano di studi per la formazione di professori di matematica e fisica.

V. Metodologia matematica in generale.

VI. Importanza dell' insegnamento matematico attuariale e commerciale.

VII. Ufficio delle nozioni di derivate e di differenziale nell' interpretazione dei fenomeni naturali.

***

Conferenze. — La Casa Teubner, la cui geniale attività è realmente prodigiosa, nel 1910 ha pubblicati, con signorile eleganza, tre fascicoli che raccomandiamo all' attenzione dei cultori delle scienze fisico-matematiche.

In uno è riprodotta la omai celebre conferenza *Raum und Zeit* di H. Minkowski; l' improvvisa e deplorata morte dell'autore avendo a lui vietato di curare tale ristampa, il còmpito fu assunto dal Prof. Gutzmer, il quale volle adornarla di un bellissimo ritratto dell' autore della « Geometrie der Zahlen ».

In altro si trova la conferenza *Ueber Elektronen* fatta dal Prof. H. Wien nel 1906, con nuove note atte a renderla corrispondente all' odierno stato delle nostre cognizioni sopra un argomento da qualche tempo all' ordine del giorno.

Nel terzo dei detti opuscoli il Prof. K. Schwarzschild ha raccolto sotto il titolo *Ueber das System der Fixsterne*, quattro scritti, il terzo dei quali porta lo stesso titolo del tutto, mentre gli altri concernono rispettivamente « Il telescopio », « Le lettere cosmologiche del Lambert » e « L'universo ». Tale pubblicazione è dedicata al Prof. V. Seeliger in occasione del suo LX genetliaco.

***

Eppur si muove! — Che tale frase non sia stata pronunciata da Galileo forse mai e certamente non di fronte ai suoi giudici, è cosa omai generalmente ammessa. Ma, quali siano state le origini di tale leggenda, è questione storica attorno a cui molti si affaticarono indarno. Ora A. Favaro, in un articolo pubblicato il 12 Luglio 1911 dal *Giornale d'Italia*, ha fatto conoscere come quel celebre motto si trovi in un quadro attribuito al Murillo, avente per protagonista appunto Galileo e che sembra risalire al 1645, cioè a tre anni dopo la morte del sommo scienziato.

***

Inedita Tanneryana. — Il I fascicolo della *Révue archéologique* del 1911 contiene un lavoro postumo di P. Tannery

Digitized by Google

Sur le spondiasme dans l' ancienne musique grecque, non certo indegno del dotto eminente, la cui scomparsa è ancora così lamentata.

***

Una biografia di Grègoire de Saint-Vincent si legge nel T. XXI della *Biographie nationale publiée par l'Académie royale dé Belgique.* Ne è autore uno specialista di grande rinomanza: il P. H. Bosmans; ciò basta per rendere sicuri che le notizie ivi date sono complete e degne della fede più assoluta.

***

Pubblicazioni recenti sopra la storia delle matematiche.

A. Favaro. *Serie ventesima di scampoli galileiani.* Atti e Memorie della R. Accademia di Padova, vol. XYVI, 1909. (Contiene i seguenti capitoli: CXXXI. La testuale dichiarazione di Papa Urbano VIII a Galileo circa l' opinione copernicana. CXXXII. Intorno alla morte di Federico Cesi ed alle sorti della Accademia dei Lincei da lui fondata. CXXXIII. Una conversazione con Galileo circa l'utilità della Geometria).

A. Favaro. *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei.* XXIII. *Federico Borromeo.* Miscellanea Ceriani 1909. XXIV. *Marino Ghetaldi.* Atti del R. Istituto Veneto, T. LXIX, 1909-910. (Questo notevole contributo alla biografia del celebre geometra ragusino va segnalata a tutti gli storici della matematica pei nuovi dati relativi alle sue opere scientifiche ed alle sue relazioni con Vieta e perchè è ivi assodato che la data della sua morte è, contrariamente a quanto fin quì ritenevasi, l'11 Aprile 1626).

P. Stäckel, *Johann Albrecht Euler* (Vierteljahrschrift der naturf. Ges. in Zürich, T. LV, 1910). I lavori preparatori per l' edizione delle *Opere di Leonardo Eulero* condusse a considerare anche l' opera scientifica del figlio maggiore del grande analista svizzero (n. 16 Novembre 1734, m. 6 Settembre 1800); e nel presente articolo ne è tracciata la biografia, ne sono fatte rilevare le benemerenze, sia dirette sia per la collaborazione al padre, ed è dato un completo elenco delle sue pubblicazioni scientifiche, le quali versano, si può dire senza eccezione, sopra la matematica applicata.

P. Duhem. *La physique néoplatonicienné au Moyen Age.* Revue des Questions scientifiques, Octobre 1910. (Questa estesa e dotta memoria è un frammento di uu' opera di lunga lena che l'A. prepara sopra la *Formation du système de Copernic).*

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abel 77.
d'Alembert 71.
Amaldi 23, 45.
Amodeo 45.
Anassagora 58.
Anassimene 58.
Apollonio 58.
Appell 29, 31, 75, 130.
Arbogast 83.
Archimede 58, 60, 103.
Archita 58.
Aristotele 4, 58, 60.
Arzelà 74, 75.
Atkinson 81.
Auerbach 128.

Bäcklund 47.
Bagnera 29, 32, 33, 33 n.
Baker 79.
Barbieri 112.
Bauschinger 47.
Battaglini 56, 99.
Bellatalla 26.
Bellavitis 81 n, 87.
Beltrami 48.
Beman 105.
Bernoulli R. 47.
Berry 79.
Berzolari 44, 45.
Bessel 128.
Beutel 124, 125.
Boggio 45, 107, 108.
Böhm 46, 76, 77.
Bolza 34, 113, 115, 118.
Bolyai 27.
Boole 37, 44, 45.
Borel 73, 74.
Borchardt 23.
Borromeo 136.
Bortolotti 44.
Bosmans 136.
Bottasso 109.
Bouquet 90.
Bourlet 113,
Brianchon 17.
Brioschi 61, 52.
Briot 90.
Brisone 58.
Brücken 93.
Brusotti 45.
Budan 86.
Burali-Forti 45, 106-109.
Burckhardt 46.

Cabreira 5, 5 n.
Cajori 81.
Caldarera 63, 64.
Calderoni 88.
Calò 45.
Cantor G. 26, 44.
Cantor M. 1, 58, 59.
Capelli 56.
Castelnuovo 14, 29. 31 n, 85.
Catalan 73.
Cauchy 71, 75.
Cayley 62, 99.
Cebycef 75.
Celoria 45.
Cervantes 134.
Cesàro 69.
Cesi 136.
Ceva T. 48.
Charlier 47.
Chasles 99.
Cherbuliez 47.
Ciani 20, 45.
Cipolla 44, 45.
Clebsch 53, 124.
Cohn 47.
Comessatti 36.
Comte 66.
Copernico 136.
Cremona 124.
Croce 47.
Czuber 93-94.

Daniele 45.
Dantscher 69.
Darboux 91.
Darwin 79.
Davies 83.
Decourdemanche 60-61.
Dedekind 103.
Delambre 86.
Delanges 124.
Democrito 4, 58.
Desargues 17, 26.
Descartes 6.
Diels 2.
Dienger 62.
Dingeldey 135, 127.
Dini 51, 53i
Dinostrato 98.

Digitized by Google

Diocle 15.
Diofanto 58.
Drzewiecki 54.
Dürer 58 n.
Duhem 136.
Dyck 46.

Edgewort 94.
Enestrom 47.
Engel 46.
Enriques 20 n., 28-36, 44, 102.
Eraclito 58.
Erone 58.
Euclide 2, 4, 12, 58, 69, 119.
Eudosso 58, 60.
Eulero A. 136.
Eulero L. 45, 47. 61, 91, 115, 136.

Faber 46, 75.
Fabry 127, 128.
Fano 9-10.
Favaro 6, 47, 135, 136.
Fermat 79, 129, 134.
Filon 104.
Filone 58.
Finzi 45.
Flückiger 132.
Fourier 68, 70, 139.
de Franchis 7, 29, 32, 33, 33 n.
Fréchet 113.
Fredholm 28.
Fuchs 23, 62.
Fuët 76.
Fuhrmann 125.

Galilei 6, 47, 48, 135, 136.
Gauss 24, 27, 47, 53, 117.
Gazzaniga 7-9.
Geiser 100.
Gemino 58.
Gerbaldi 44, 45.
Ghetaldi 136.
Giamblico 58.
Gigli 44.
Gini 45.
G. L. *vedi* Loria G.
de la Gouipillière 24.
Gram 28.
Grandi 48.
Grassmann H. 11. 23, 50, 53, 97, 101.
Grassmann F. 131.
Green 68.
Guarducci 45.
Guimaraes 5.
Gutzmer 46, 135.

Hack 94.
Hadamard 46, 75, 112, 114.
Hancock 89, 92, 113.
Hankel 1.
Haret 66, 67.
Harnack 70.
Hayashi 48.
Heath 1.
Helmholtz 6, 97.
Hermite 34, 89, 90, 97.
Hesse 23, 53.
Hessenberg 168 n.
Heuen 46.
Hilbert 26, 75, 103, 103 n, 118, 119, 228, 192.
Hirst 96, 87.
Hobson 79.
Höfler 121, 143.
Holdred 81.
Hoppe 47.
Horner 81, 86.
Hovenstadt 119, 120.
Huber 131.
Huber P. 132.
Hultsch 1, 59.
Humbert 29, 30, 30 n, 31, 32, 34.
Hurwitz 75.

Ipparco 50.
Ippia 58.
Ippocrate 58.

Jacobi 30, 31, 32, 33, 34, 77, 89, 91, 92, 101, 114, 116.
Jellet 51, 53.
de Jonquières 100.

Kahn 131.
Kienert 48.
Killing 119, 120.
Klein 131.
Kneser 113, 117.
Koch 124.
Kossak 69.
Kowalewski 9, 27, 46, 68, 69.
Krazer 46.
Kronecker 23.
Kummer 34.

Lagrange 75, 91.
Laisant 105, 118, 119.
Lalive 47.
Lamb 46.
Lambert 37, 58 n, 135.
Landen 91.

Digitized by Google

Laplace 70, 108.
Larmor 79.
Lazzeri 45.
Lebon 130.
Legendre 77, 90, 91, 116.
Leibniz 6, 37, 48.
Letronne 59.
Lemoine 12.
Levi B. 104.
Levi E. E. 114.
Levi-Civita 46, 64.
Liapounof 46.
Lie 74.
Lind 79.
Lindemann 124.
Linsenbarth 46.
Lietzmann 121.
Lilienthal 46.
Lobàtschewsky 27.
Löbenstein 131.
Loewy 132.
Loria A. 67.
Loria G. 5 n., 6, 14, 24, 25, 37, 45, 57, 60, 61, 62, 63, 72, 87, 88, 92, 93, 95, 104, 106, 119, 120, 121, 123, 124, 125, 127, 128, 130, 133.
Losbin 130.
Lotsy 78.
Lov 79.
Lüroth 50, 57.
Luterbacher 131.

Macaulay 104.
Mc. Coll 37.
Malthus 67.
Mannheim 12.
Mannoury 25-27.
Marcolongo 45, 106-109, 130.
Markoff 46.
Marlani 88.
Martin 59.
Mascheroni 60.
Massau 133-134.
Matter 47.
Mayer 113.
Medici 25, 123.
Mellor 126.
Menecmo 58.
Menelao 58.
Méray 76, 89.
Minkowski 128, 135.
Mittag-Leffler 91.
Möbius 23, 100, 119.
Monge 11, 12, 13, 58 n., 71.
Montel 74-75.
Montucla 58.
de Morgan 37, 81, 82.
Müller E. 9, 11, 14.
Müller F. 78.
Murillo 135.

Netto 36, 37.
Neumann L 49.
Newton 6, 86, 111.
Nichelson 81.
Nicoletti 45.
Nicomaco 58, 60.
Nicomede 15.
Nielsen 73.
Nöther 101.
Nunez 134.

Oinopide 58.
Ortiz 134.

Padoa 37, 44, 45.
Painlevé 29, 75.
Paladini 9.
Paoli 48.
Pappo 58, 60.
Parmenide 59.
Pascal 17, 42.
de Paolis 9.
de Pasquier 46.
Peano 37, 39 n.
Pearson 94.
Peirce 37.
Perna 45.
Perry 125.
Pesci 45.
Pfistner 132.
Piccard 29, 30, 30 n., 31, 32, 33, 75.
Pieri 44, 45.
Pincherle 45, 69, 113.
Pitagora 2, 59, 60, 119.
Pizzamiglio 64-65.
Pizzetti 94.
Platone 2, 3, 58.
Poincaré 22 n., 62 n., 63, 29, 44.
Posidonio 58.
Poske 121.
Premoli 88.
Proclo 1, 2.

Rapp 53.
Retali 45.
Rey 134.
Ricci 88.
Riemann 23, 24, 77, 90, 91.
Rolle 68.

Digitized by Google

Römer 77, 80.
Rose 133.
Rosenthal 93.
Rothe 128.
Rudio 46, 47.
Rueda 134.
Ruffini 81, 86.
Runge 75.
Russell 43, 44.

Saint-Vincent 136.
Sarrus 48.
Scheffers 70.
Schell 56.
Schepp 51, 53.
Scherrer 46.
Schering E. 23, 24, 63.
Schering K. 23.
Schläfli 62.
Schlesinger 46, 62) 72, 73, 132.
Schröder 37, 54, 55, 56.
Schubert 58.
Schulze 78.
Schur 57.
Schwarzschild 135.
Scorza 45.
Seeliger 135.
Segner 37.
Segre 55.
Serret 70.
Severi 28-36, 45.
Simart 30 n.
Simon 57, 60.
Smith D. E. 105.
Somigliana 148.
Soundara Row 105.
Spera 65.
Stäckel 46, 136.
Staudigl 11.
Staudt 16.
Steiner 16, 100, 101.
Stirling 70.
Sturem R. 95-102.
Sylvester 87, 99.

Talete 58, 60.
Tannery P. 136.
Taylor 68, 75, 110.
Teeteto 2, 4, 58.
Tenca 45.
Teodoro 2, 3.
Teone 58.
Terradas 134.
Teubner 78-79.
Teudio 58.
Thiele 110, 112.
Thomae 54, 67.
Thomson 6.
Timerding 46.
Togliatti 102.
Tolomeo 58.
Tonelli 75.

Vacca 45.
Vailati 87, 88.
Vallois 9, 10.
Veblen 102. 104.
Vegas 134.
Veneroni 44.
Veronese 7-9, 46.
Vessiot 46.
Vieta 136.
da Vinci 6, 133.
Vitali 45.
Viterbi 45.
Viti 45.
Vivanti 28, 44, 45, 69, 70, 73, 74, 75, 76, 118.
Vogt 1, 1 n., 2, 3, 4.
Volterra 72, 113.
Voss 46.

Weber R. H. 21, 22.
Weber W. 21, 22, 46.
Weierstrass 23, 29, 60, 62, 71, 89, 90, 91, 92, 112, 115, 116, 117.
Weingarten 56.
Wellstein 21.
Werner 133.
Wetz 49.
Weyl 126.
Wiedemann 133.
Wien 135.
Wiener 97,
Wizniarski 66.
Wolfskehl 79.
Wronski 28.

Xenocrate 4.

Young G. G. 105.
Young J. R. 81, 82.
Young J. W. 102, 104.

Zenone 58.
Zeuthen 80.
Zimmermann 94.

Digitized by Google

Digitized by Google

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche.

Si pubblica in fascicoli trimestrali, ciascuno di almeno 32 pag. in 8.°.

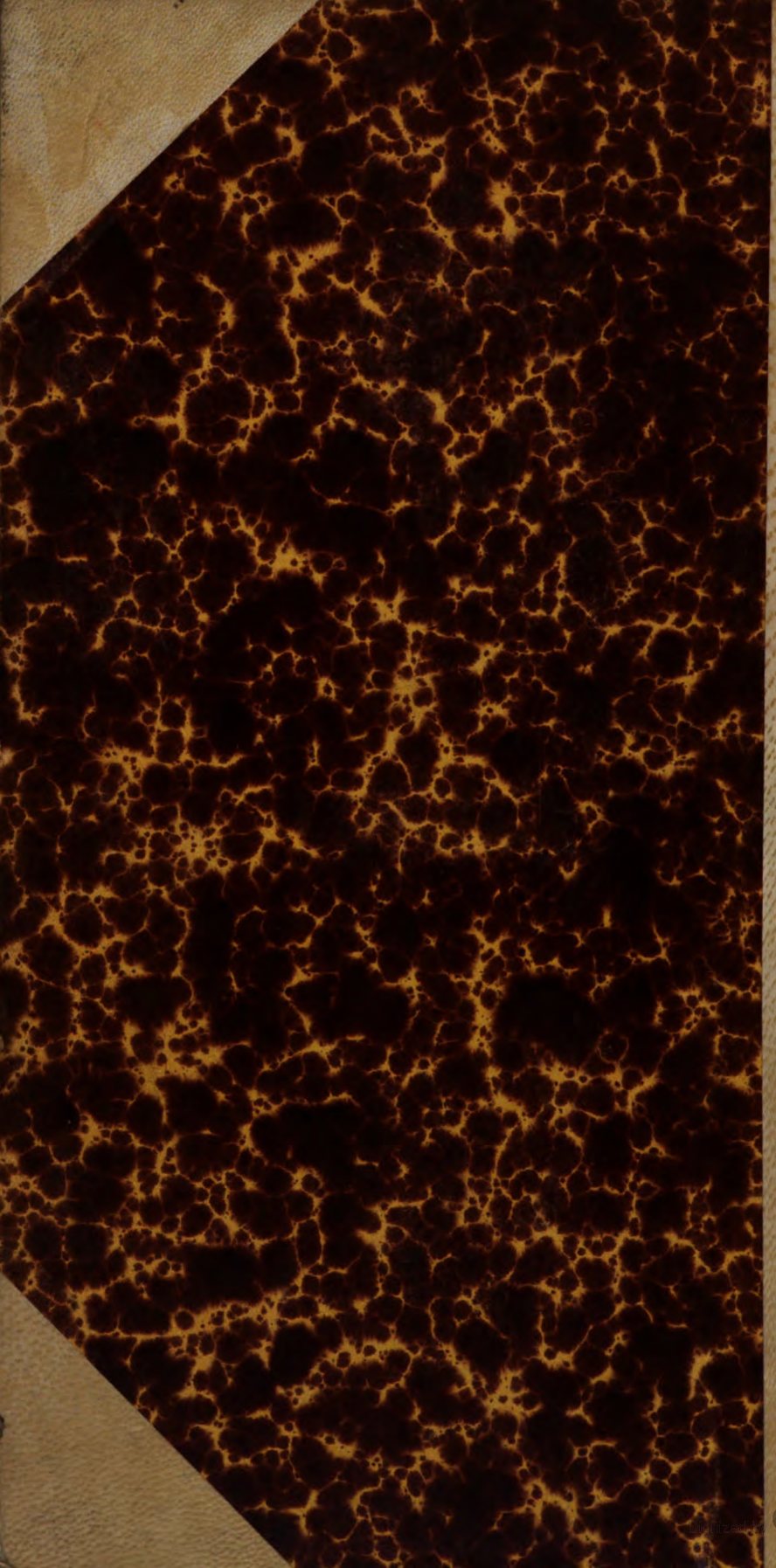
Abbonamento annuo per l'Italia L. 6, per l'Estero L. 7.50.

Gli abbonamenti si ricevono presso la Casa Editrice ROSENBERG & SELLIER, Torino, Via Maria Vittoria, 18, e presso i principali librai dell'Italia e dell'Estero.

Per quanto concerne l'Amministrazione rivolgersi alla Casa editrice; invece gli articoli da inserirsi, i libri, giornali ecc., cioè in generale quanto concerne la Redazione, va indirizzato al Prof. G. LORIA, Genova, Piazza Manin, 41.

Digitized by Google

Digitized by Google


BIBLIOTECA
Digitized by Google